



INTERACTION SON-ÉCOULEMENT

Remy Berthet

► To cite this version:

Remy Berthet. INTERACTION SON-ÉCOULEMENT. Acoustique [physics.class-ph]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2001. Français. NNT : . tel-00003781

HAL Id: tel-00003781

<https://theses.hal.science/tel-00003781>

Submitted on 18 Nov 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
Laboratoire de Physique

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon
Spécialité : Physique

au titre de l'école doctorale de Physique et Astrophysique de Lyon

présentée et soutenue publiquement le 20 Avril 2001

par Rémy BERTHET

INTERACTION SON-ÉCOULEMENT

Directeur de Thèse : Stéphane FAUVE

Devant la commission d'examen formée de :

M. Dominique ASTRUC	
M. Patrick BONToux	Rapporteur
M. Alessandro BOTTARO	
M. Bernard CASTAING	Président
M. Stéphane FAUVE	
M. Mathias FINK	
M. Daniel JUVÉ	Rapporteur

Remerciements

Je remercie tout d'abord Jean-Pierre Hansen qui m'a accueilli au sein du Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, ainsi que Jacques Meunier qui n'a mis aucun obstacle à la conclusion de cette thèse au laboratoire de Physique Statistique de l'ENS-Paris. À travers eux, je salue l'ensemble des personnes travaillant dans ces deux laboratoires et que j'ai cotoyées aux cours de ces années.

Je souhaite remercier Stéphan Fauve de m'avoir accueilli en thèse et de m'avoir proposé ce sujet. Son profond sens physique et le lien permanent entre théorie et expérience ont largement contribué au bon déroulement de cette thèse et à son aboutissement. Grâce à des interrogations physiques permanentes, il a toujours su faire rebondir cette recherche. Ce travail n'aurait pas non plus été possible sans Dominique Astruc, qui a bien voulu prendre en charge l'aspect numérique. Il m'a transmis son goût de la modélisation numérique et de l'élaboration de simulations pour étudier des phénomènes physiques. Je remercie également Jean-Luc Estivalèzes pour son aide à l'élaboration du code présenté dans ce manuscrit.

Je tiens à remercier Patrick Bontoux et Daniel Juvé d'avoir accepté la tâche de rapporteur de ce travail. Les interrogations qu'ils ont suscitées sur ce travail m'ont permis d'élargir le contexte de cette thèse. Merci également à Alessandro Bottaro et à Mathias Fink d'avoir participé à ce jury, ainsi qu'à Bernard Castaing qui a bien voulu endossé le rôle de président de ce jury.

Je remercie vivement Christophe Coste pour sa patience et sa gentillesse à répondre à mes interrogations et à m'aider pour traiter de nombreux points délicats. Le début de ce travail et ses prolongements doivent aussi beaucoup à Fernando Lund, Rodrigo Hernández et Raül Labbé qui m'ont montré, au fil de nos discussions, des approches complémentaires du sujet ainsi qu'à Jean-François Pinton.

J'ai aussi découvert au cours de cette thèse « les joies et les mystères » du pendule paramétrique bruité. Cela m'a permis d'enrichir mon expérience pratique en réalisant une modélisation électronique du pendule. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler à cette occasion avec Artyom Petrosyan, Stefania Residori et Benoît Roman.

Enfin, je remercie Sébastien Aumaître et Bruno Gilles d'avoir réussi l'exploit de partager un même bureau avec moi. Une mention particulière à Marie-Pierre et à Marie-Jeanne pour leur patience face à mes déboires administratifs et universitaires. Merci également aux D24 boys (anciens et actuels) pour leur bonne humeur et leur soutien à la fin de ce travail.

Table des matières

Introduction	9
1 L'interaction son-écoulement	11
1.1 Introduction	11
1.2 Approche générale	12
1.2.1 Limite des courtes longueurs d'ondes	12
1.2.2 Approximation de Born	14
1.3 Approche locale	16
1.4 Lien avec les expériences de diffusion	17
2 Objectifs de ce travail	18
3 Présentation du document	20
I Revue sur la diffusion du son par un écoulement	21
1 Acoustique géométrique	23
1.1 Introduction	23
1.2 Équation de l'eikonale	24
1.3 Relation de dispersion	26
1.4 Évolution du vecteur d'onde	26
1.5 Équation des rayons pour des milieux stationnaires	28
1.5.1 Réfraction dans un milieu inhomogène et au repos	28
1.5.2 Réfraction en présence de vorticité	28
1.5.3 Cas général	30
1.6 ��quation d'ondes en acoustique géométrique	31
1.6.1 Introduction	31
1.6.2 Linéarisation des équations de la dynamique	32
1.6.3 Simplifications dans le cas géométrique	33
1.7 Déformation des fronts d'onde par l'advection	35
1.7.1 Introduction	35
1.7.2 ��quation d'évolution de la phase	36
1.8 Conclusion	37
<i>Annexes</i>	39

1.A	Estimation du gradient de c	39
1.B	Simplification de l'équation d'ondes en acoustique géométrique	40
2	Tracé de rayons	41
2.1	Méthodes proposées	41
2.1.1	Tracé de rayons à l'ordre \mathcal{M}	41
2.1.2	Solution générale dans le cadre de l'eikonale	42
2.1.3	Précisions numériques	42
2.1.4	Calcul de l'angle de réfraction θ	42
2.2	Tourbillon avec cœur en rotation solide	43
2.2.1	Tracé de rayons à l'ordre \mathcal{M}	44
2.2.2	Utilisation de la méthode générale	44
2.2.3	Conclusion	49
2.3	Cas des tourbillons à circulation nulle	49
2.3.1	Introduction	49
2.3.2	Tourbillon en rotation solide à circulation nulle	51
2.4	Cas limite d'un vortex ponctuel	56
2.5	Conclusion	58
3	Résolution approchée de l'équation de diffusion	59
3.1	Introduction	59
3.2	Amplitude de diffusion	60
3.3	Sections efficaces	60
3.4	Ordres de grandeur des termes d'interaction	61
3.5	Limite de la diffusion de Rayleigh	62
3.6	Cas général	65
3.7	Approximation de Born	67
3.7.1	Introduction	67
3.7.2	Amplitude de diffusion dans le cas sonore	67
3.7.3	Domaine de validité de la première approximation de Born . .	71
3.8	Rôle de la composante potentielle dans la diffusion	75
3.9	Forme générale de l'amplitude de diffusion	76
3.9.1	Analyse dimensionnelle	76
3.9.2	Approximation de Born	77
	<i>Annexes</i>	79
3.A	Critère du champ lointain	79
3.B	Théorème optique	81
3.C	Validité de l'hypothèse d'incompressibilité	82
3.D	Fonctions de Green de l'équation d'ondes	83

II Méthode des ondes partielles 85

1 Introduction 87

2 Application à la diffusion du son	89
2.1 Introduction	89
2.2 Présentation de la méthode	89
2.3 Expression des ondes partielles	90
2.4 Limitations de la résolution	91
2.5 Solution extérieure à l'écoulement	92
2.6 Solution intérieure à l'écoulement	93
2.7 Conditions aux limites	94
3 Exemples	96
3.1 Tourbillon en rotation solide	96
3.1.1 Cas $K_n = 0$	97
3.1.2 Cas $K_n \neq 0$	97
3.1.3 Conclusion	99
3.2 Tourbillon à circulation non nulle	99
3.3 Tourbillon à circulation nulle	101
4 Conclusion	111
Annexes	112
II.A Expression générale des κ_p^n	112
II.B Expression de b_n	113
III Simulation numérique	117
1 Introduction	119
1.1 Généralités	119
1.2 Calcul des quantités sonores	120
1.3 Algorithme de calcul	123
2 Schéma intérieur	125
2.1 Introduction	125
2.2 Schéma de Mac-Cormack modifié	126
2.2.1 Intérieur du domaine de calcul	127
2.2.2 Frontières du domaine de calcul	128
2.3 Application à deux dimensions	128
2.4 Stabilité du schéma Mac-Cormack 2-4	129
2.5 Conclusion	129
3 Algorithme des conditions aux limites	130
3.1 Introduction	130
3.2 Conditions aux limites physiques	131
3.3 Conditions aux limites numériques	132

3.3.1	Introduction	132
3.3.2	Exemples	134
3.3.3	Conditions aux limites pour l'étude de la diffusion du son . . .	135
3.3.4	Mise en œuvre	136
3.3.5	Discussion	137
3.3.6	Conclusion	138
3.4	Algorithme CL_1	138
3.5	Algorithme CL_2	139
3.5.1	Position du problème	139
3.5.2	Décomposition des variables primitives	140
3.5.3	Validité du traitement	141
3.5.4	Implémentation numérique	142
3.5.5	Mise en pratique	143
3.6	Conclusion	144
4	Quelques tests classiques	146
4.1	Introduction	146
4.2	Écoulement stationnaire	147
4.3	Dissipation numérique de l'écoulement moyen	150
4.4	Dispersion et atténuation numérique des ondes	151
4.5	Choix de l'implémentation de l'algorithme CL_2	156
4.6	Validité des conditions aux limites	160
4.6.1	Un émetteur sonore ponctuel	161
4.6.2	Un émetteur plan non-réfléchissant	164
4.6.3	Deux émetteurs sonores plans	164
4.6.4	Récapitulatif	166
5	Validation dans le cadre de la diffusion du son	169
5.1	Estimation des ondes réfléchies	169
5.2	Diffusion du son par un vortex de Taylor	172
5.3	Diffusion du son par un dipôle de vortacité	173
5.4	Diffusion par un tourbillon à circulation non nulle	174
6	Conclusion	177
	Annexes	178
	III.A Méthode des caractéristiques pour les frontières	178
	III.B Procédure de calcul des conditions aux limites	181
IV	Écoulements à circulation nulle	183
1	Vortex isolé à circulation nulle	185
1.1	Introduction	185

1.2	Structure des tourbillons à circulation nulle	186
1.2.1	Le tourbillon de Taylor	186
1.2.2	Le tourbillon polynomial	188
1.2.3	Comportement dans la limite de la diffusion à grande longueur d'onde	190
1.3	Limite du champ lointain	190
1.4	Validité de l'approximation de Born	194
1.4.1	Introduction	194
1.4.2	Écoulement de référence	195
1.4.3	Diffusion du son	196
1.4.4	Conclusion	201
1.5	Effet du sens de rotation de l'écoulement	201
1.6	Influence du nombre de Mach	203
1.7	Influence de la longueur d'onde sonore	207
1.7.1	Introduction	207
1.7.2	Évolution de l'amplitude de diffusion	208
1.7.3	Section efficace de diffusion	219
1.7.4	Théorème optique	222
1.7.5	Conclusion	222
1.8	Effet de champ proche	222
1.9	Conclusion	223
2	Dipôle de vortacité	225
2.1	Introduction	225
2.2	Structure de l'écoulement	226
2.3	Choix des paramètres de l'écoulement	227
2.4	Validité des approximations	227
2.4.1	Stationnarité de l'écoulement moyen	229
2.4.2	Approximation du champ lointain	229
2.4.3	Première approximation de Born	231
2.5	Effet de la longueur d'onde	231
2.5.1	Introduction	231
2.5.2	Amplitude de diffusion	232
2.5.3	Analogie optique	232
2.6	Effet de l'orientation du moment dipolaire	236
2.6.1	Caractéristiques de la diffusion	236
2.6.2	Tracé des rayons acoustiques	239
2.7	Cas $\varphi = 90^\circ$	239
2.8	Conclusion	242
3	Conclusion	244

V	Écoulements à circulation non nulle	247
1	Introduction	249
2	Vortex d'Oseen	250
2.1	Introduction	250
2.2	Structure de l'écoulement	250
2.3	Choix des paramètres	251
2.4	Validité des approximations	253
2.4.1	Approximation du champ lointain	253
2.4.2	Première approximation de Born	253
2.5	Évolution de la diffusion avec la longueur d'onde	254
2.6	Prise en compte de l'advection	261
2.6.1	Introduction	261
2.6.2	Calcul de l'onde incidente réfractée	262
2.6.3	Champ sonore diffusé	264
2.7	Conclusion	266
3	Étude d'une configuration expérimentale	267
4	Conclusion	269
	Conclusion	271

Liste des symboles utilisés

- $\Re(z)$: partie réelle de z
- $\Im(z)$: partie imaginaire de z
- $\tilde{\varphi}(\omega)$: transformée de Fourier de $\varphi(t)$
- (x, y, z) : coordonnées cartésiennes
- $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$: vecteurs unitaires des coordonnées cartésiennes
- (r, θ, z) : coordonnées cylindriques
- $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$: vecteurs unitaires des coordonnées cylindriques
- (r, θ) : coordonnées polaires
- $(\hat{r}, \hat{\theta})$: vecteurs unitaires des coordonnées polaires
- \hat{n} : vecteur unitaire dans la direction \vec{n}
- R : distance d'observation
- $f(\theta)$: amplitude de diffusion dans la direction angulaire θ
- $g(r, \theta)$: amplitude de diffusion « généralisée » dans la direction angulaire θ à la distance r
- $d\sigma_{diff}/d\Omega$: section efficace différentielle de diffusion
- σ_{diff} : section efficace totale de diffusion
- σ_{tot} : section efficace totale
- σ_{abs} : section efficace d'absorption
- ρ : masse volumique
- p : pression
- \vec{v} : vitesse

- $\vec{\Omega}$: vorticité
- Γ : circulation de l'écoulement
- U, L : vitesse et taille caractéristique de l'écoulement
- ρ_0, p_0 : masse volumique et pression dans un milieu au repos ($\vec{v} = \vec{0}$). Sauf indications contraires, $\rho_0 = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ et $p_0 = 1.03.10^5 \text{ Pa}$.
- γ : rapport des capacités calorifiques ($\gamma = C_p/C_v$). Sauf indications contraires, $\gamma = 1.4$.
- c_0 : célérité du son dans un milieu au repos ($\vec{v} = \vec{0}$)
- c : célérité du son dans le milieu considéré
- \mathcal{M} : nombre de Mach de l'écoulement moyen ($\mathcal{M} = U/c$)
- T, f : période et fréquence ($f = 1/T$)
- λ : longueur d'onde
- ν : pulsation ($\nu = 2\pi f$)
- \vec{k} : vecteur d'onde ($\|\vec{k}\| = \nu/c = 2\pi/\lambda$)
- β : rapport entre la taille de l'écoulement et la longueur d'onde sonore ($\beta = k L$)
- f_n : onde partielle d'indice n (ρ_n pour le densité, ...)
- J_x : fonction de Bessel J d'ordre x
- H_x^1 : fonction de Hankel de première espèce d'ordre x
- l_x, l_y : tailles du domaine de calcul selon x et selon y
- d_x, d_y : taille du pas de grille selon x et selon y
- n_x, n_y : nombre de points du maillage selon x et selon y
- ρ_s : masse volumique de l'onde sonore
- ρ_{inc} : masse volumique de l'onde sonore plane incidente
- ρ_{diff} : masse volumique de l'onde sonore diffusée

Introduction

Que peut-on faire d'autre après avoir dégagé en tierce ? Il traça d'autres lignes et arcs, nota les degrés, consulta les notes et les livres qu'il tenait à sa portée sur la table. Aucune des possibilités ne lui semblait convenir; ...

A. Pérez-Reverte.

1. L'interaction son-écoulement

1.1 Introduction

Nous présentons ici une revue des différentes approches utilisées dans le cadre de l'étude de l'interaction entre une onde sonore et un écoulement. Certaines techniques, utilisés dans notre étude, seront reprises ultérieurement. Ce chapitre permet ainsi de situer ce travail de thèse dans le contexte des résultats et des recherches en cours sur ce sujet.

L'évolution d'un fluide compressible peut être analysée en termes d'interactions entre trois modes hydrodynamiques de l'écoulement [CK58] : le mode sonore, le mode entropique et le mode vorticité. La diffusion du son résulte ainsi de l'interaction entre le mode sonore et les modes entropique ou de vorticité. Nous nous intéressons plus particulièrement au couplage entre le mode sonore et le mode de vorticité, en étudiant l'interaction entre une onde sonore (célérité c) et un écoulement rotationnel, non dissipatif et compressible (nombre de Mach $\mathcal{M} = U/c \ll 1$, taille caractéristique L).

On ne considèrera que des ondes sonores monochromatiques de pulsation ω (longueur d'onde λ). L'hypothèse commune à l'ensemble de notre étude de l'interaction son-écoulement est que l'écoulement est stationnaire lors de son interaction avec l'onde sonore. Cela revient à le considérer comme « gelé » lors du passage de l'onde, c'est à dire, en posant T_U le temps caractéristique d'évolution de l'écoulement moyen et $T = 2\pi/\omega$ la période de l'onde, à se placer dans l'approximation $T_U \gg T$. De plus, l'écoulement moyen est toujours supposé subsonique, avec un nombre de Mach $\mathcal{M} \ll 1$.

L'interaction entre une onde sonore et un écoulement a largement été étudiée, avec des approches très différentes. L'une des motivations de ces travaux est l'étude des phénomènes atmosphériques ou océaniques [Jon90, Obu41, Sta00], ce qui conduit à considérer l'interaction entre une onde sonore et un milieu turbulent, la diffusion du son ayant pour origine les gradients de vitesse, de température ou plus généralement d'inhomogénéités de l'écoulement.

Plus récemment, des expériences ont mis en évidence la pertinence de l'utilisation des ondes sonores comme sonde pour l'étude de la structure d'un écoulement complexe [BCP91, PLFC93, LP98, MMRF99] et la détection de structures localisées [DPF98, HP99, BMW99]. Dans cette optique, il apparaît plus pertinent de se focaliser tout d'abord sur l'étude de l'interaction entre un écoulement parfaitement identifié et une onde sonore.

Une fois que cette étude a été menée, il est alors possible de considérer des écoulements plus complexes, afin d'accéder à des propriétés statistiques ou à des grandeurs globales de l'écoulement.

Ces deux visions de l'interaction son-écoulement sont complémentaires et permettent la modélisation d'un nombre important de phénomènes présents dans l'interaction son-écoulement.

Il faut de plus remarquer qu'il existe de très fortes analogies entre la diffusion d'une onde sonore par un écoulement et la propagation d'une onde lumineuse dans un milieu anisotrope : la diffusion peut être vue comme de la diffraction d'ondes sonores par un obstacle se propageant dans un milieu anisotrope.

1.2 Approche générale

Une première approche du phénomène consiste à considérer le milieu diffusant dans sa globalité et à le décrire par ses propriétés statistiques. Cela permet de modéliser l'interaction son-écoulement dans de nombreux cas expérimentaux (atmosphère [OMWG97], océan [Mat87, OHWB00], écoulements turbulents [ST70, PP97, OGG⁺98], écoulements de von Kármán derrière un cylindre [BCP91], ...) sans se préoccuper de manière précise de la nature et de la structure des diffuseurs. Comme toujours, l'observation expérimentale permet de cadrer plus précisément cette approche et d'exhiber deux comportements asymptotiques : soit la longueur d'onde sonore λ vérifie $\lambda \ll L$, ce qui est par exemple le cas pour les phénomènes atmosphériques, soit $\lambda \gg L$, ce qui est une bonne approximation de certaines conditions expérimentales [BMW99].

1.2.1 Limite des courtes longueurs d'ondes

Dans le cas limite des petites longueurs d'ondes $\lambda \ll L$, on se situe dans la limite de l'acoustique géométrique. Certains aspects de cette limite seront repris plus en détail dans le paragraphe 1 du chapitre I.

Il est alors possible d'utiliser les techniques de l'optique géométrique. Blokhintzev [Blo46] a ainsi établi, à l'aide d'un développement en échelles multiples en λ/L , les équations de propagation d'une onde sonore dans un écoulement, l'équation des rayons acoustiques et la répartition de l'amplitude sonore le long d'un rayon, ainsi qu'une généralisation du principe d'Huygens-Fresnel dans le cas d'un milieu en mouvement. Cette approche a été largement reprise par la suite afin d'analyser en termes de rayons acoustiques, la diffusion du son par les écoulements. Cette diffusion s'apparente, à l'ordre le plus bas où l'on ne s'intéresse qu'à la propagation des rayons acoustiques, à de la réfraction d'ondes sonores dans un milieu anisotrope. Comme nous le verrons dans le paragraphe 1 du chapitre I, différentes techniques de tracés de rayons peuvent être mises en œuvre selon la nature du problème étudié.

Il est également possible d'exhiber dans ce régime une équation d'ondes modifiée pour la pression sonore p_s dans un écoulement stationnaire (champ de vitesse \vec{v}_0) et de nombre de Mach $\mathcal{M} \ll 1$ (voir le paragraphe 1.6 du chapitre I pour de plus amples détails) :

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)^2 - c_0^2 \Delta \right] p_s = 0. \quad (1.1)$$

Cette équation d'ondes, qui tient compte de l'advection du son par l'écoulement moyen \vec{v}_0 , permet de relier les propriétés statistiques de l'écoulement à la structure du champ sonore diffusé dans la limite du champ lointain, en supposant que le son est un écoulement potentiel [Obu41]. Elle a également été utilisée dans la limite de l'acoustique géométrique par Blokhintzev [Blo46], avec l'hypothèse supplémentaire que l'écoulement moyen est irrotationnel (voir aussi l'annexe de [UL97]), afin d'exprimer le principe d'Huygens-Fresnel en acoustique.

Une approche plus générale consiste à prendre en compte les variations locales de la célérité du son

$$c(\vec{r}) = c_0(1 + \varepsilon\mu) \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1.2)$$

où μ dépend des propriétés du milieu, ce qui conduit à étudier l'équation d'ondes

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)^2 - c(\vec{r})^2 \Delta \right] p_s = 0. \quad (1.3)$$

Wenzel et Keller [WK69] ont ainsi étudié, à l'aide d'un développement perturbatif en ε , les propriétés de l'onde sonore cohérente (vitesse de phase, coefficient d'atténuation) se propageant dans un écoulement turbulent.

Une modélisation couramment utilisée consiste à d'écrire l'interaction son-écoulement à l'aide d'une équation d'Helmholtz comportant un indice variable :

$$\left[\Delta + k_0^2 n(\vec{r}) \right] p_s = 0. \quad (1.4)$$

où $k_0 = \omega/c_0$ est le vecteur d'onde dans le milieu au repos et $n(\vec{r}) = c(\vec{r})/c_0$ est l'indice du milieu au point \vec{r} considéré. Cette équation pour une pression sonore monochromatique a été obtenue de manière rigoureuse par Bergmann [Ber46] et son domaine de validité a été analysé en détail par Neubert *et al.* [NL70]. Il reste alors à déterminer une expression satisfaisante pour l'indice n , i.e. modélisant correctement le problème étudié. À l'aide d'un développement de l'indice analogue à (1.2), Mintzer [Min53] a ainsi déterminé l'amplitude moyenne d'impulsions sonores dans le cadre de la première approximation de Born, approximation que nous détaillerons au paragraphe 3.7 du chapitre I).

En s'inspirant de l'approximation paraxiale employée en optique, l'approximation parabolique, valide dans la limite des courtes longueurs d'ondes, est également largement utilisée pour résoudre la relation 1.4 : on suppose que la diffusion du son a essentiellement

lieu autour de la direction d'incidence (\hat{z}), ce qui permet d'écrire l'équation d'Helmholtz (1.4) sous la forme

$$2ik_0 \frac{\partial p_s}{\partial z} + \Delta_{\perp} p_s = -k_0^2 (n^2 - 1) p_s \quad (1.5)$$

où Δ_{\perp} est l'opérateur laplacien dans les directions perpendiculaires à la direction de propagation \hat{z} . Les approximations conduisant à cette équation parabolique sont détaillées par Candel [Can79].

Remarque : la forme du terme d'interaction son-écoulement obtenu dans l'approximation parabolique est analogue à celle obtenue dans le cadre de la première approximation de Born pour le problème générale de diffusion (voir le paragraphe 1.2.2) dans la limite des petits angles de diffusion [Can79]. Cependant, l'approximation parabolique permet, en supposant le champ sonore lentement variable spatialement, de conserver une interaction complète entre l'écoulement et l'onde sonore (terme source $k_0^2 (n^2 - 1) p_s$) alors que dans l'approximation de Born, on ne prend en compte que l'interaction entre l'écoulement et l'onde sonore incidente p_s^{inc} (terme source proportionnel à $k_0^2 (n^2 - 1) p_s^{inc}$).

L'équation parabolique (1.5) a largement été employée dans la modélisation numérique et analytique de la propagation du son dans un milieu turbulent. Numériquement, elle présente l'avantage de pouvoir effectuer des simulations « simples » puisque ne faisant intervenir qu'une seule équation que l'on peut résoudre à l'aide de techniques standards [Can79, KBBJCB91, DBBJ99, Man00]. Elle permet également des traitements analytiques de la propagation du son dans des milieux inhomogènes [OT95, OMWG97]).

Cependant, l'approximation parabolique n'est valable que dans les hypothèses des petites longueurs d'ondes ($\lambda \ll L$), d'un champ sonore d'amplitude lentement variable dans l'espace (ces deux conditions sont la base de l'approximation de l'eikonale en acoustique géométrique) et d'une diffusion sonore essentiellement dans la direction incidente. Ces trois hypothèses sont indépendantes et assez restrictives. Ainsi, l'emploi de ce type d'approximation ne permet pas d'étudier la propagation d'une onde sonore de longueur d'onde $\lambda \simeq L$ ou $\lambda \gg L$.

1.2.2 Approximation de Born

Dans la limite de l'approximation de Born, Kraichnan [Kra53] a donnée une expression formelle liant la puissance acoustique diffusée à la transformée de Fourier de la composante incompressible du champ de vitesse d'un écoulement turbulent. Ce calcul, effectué dans l'approximation de la diffusion simple (première approximation de Born), présente l'intérêt de pouvoir analyser, au moins de manière qualitative, la diffusion du son par un écoulement turbulent :

- la puissance acoustique diffusée dans la direction \hat{n} est proportionnel à ω_0^n ($n \geq 4$), ce qui est conforme à une analyse générale des phénomènes de diffusion à grandes longueurs d'onde (diffusion de Rayleigh, voir le paragraphe 3.5 du chapitre I) ;

- la diffusion du son par un écoulement est fortement anisotrope : il n'y a pas de diffusion dans les directions perpendiculaires à la direction de l'onde incidente et pas de rétro-diffusion ($\theta = \pi$ avec les notations de la figure 2.1). Cette dernière propriété de l'interaction son-écoulement permet de distinguer la diffusion par les gradients de vitesse de l'écoulement de la diffusion par des inhomogénéités de température : dans ce dernier cas, la diffusion est maximale dans les directions incidente et en rétrodiffusion, ce qui permet de distinguer expérimentalement les deux contributions [PLFC93, PP97] ;
- dans l'approximation de Born, la puissance sonore diffusée est proportionnelle à \mathcal{M}^2 , alors que la puissance sonore due au son émis par l'écoulement est en \mathcal{M}^4 (ce dernier ordre de grandeur est cohérent avec [How00]) ;
- cette analyse est basée sur une modélisation de l'interaction son-écoulement sous la forme d'un terme source S pour l'équation d'ondes de l'onde sonore. Ce terme source s'écrit, pour une onde sonore de vitesse $\vec{v}_s(\vec{r}, t)$ et un écoulement moyen de vitesse $U(\vec{r}, t)$

$$S(\vec{r}) = \frac{\partial^2 (v_{s_i} U_j)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.6)$$

analogue au tenseur de Lightill [Lig52] que l'on peut écrire sous la forme

$$T_{ij} = v_{s_i} U_j \quad (1.7)$$

si l'on ne s'intéresse qu'à l'interaction entre le son et l'écoulement moyen.

Cependant, l'étude de la diffusion du son en termes de puissance diffusée ne permet pas d'identifier clairement le mécanisme de la diffusion du son, contrairement au mécanisme d'émission du son par un écoulement, même si l'analogie est très forte entre les deux descriptions par l'emploi du tenseur de Lightill et laisse penser que la diffusion du son est intimement liée aux gradients de vitesse de l'écoulement. Monin [Mon62] a généralisé cette approche en considérant à la fois la diffusion par les inhomogénéités de température et de vitesse dans le cas d'une atmosphère turbulente. On constate ainsi une différence très importante entre la diffusion par les gradients de température et les gradients de vitesse : il existe de la rétrodiffusion dans le cas de l'interaction d'une onde sonore avec des fluctuations de température.

Fabrikant [Fab83] a montré, à partir des équations générales modélisant l'interaction entre une onde sonore et un écoulement, que le tenseur de Lightill sous la forme (1.7) est bien le terme source principal de la diffusion du son par un écoulement. En ne considérant que la composante rotationnelle de l'écoulement, en se plaçant dans le cadre de la première approximation de Born et de l'approximation de champ lointain, il obtient alors l'expression de l'amplitude de diffusion $f(\theta)$ en fonction de la transformée de Fourier de la vorticité de l'écoulement (voir le paragraphe 3.6 du chapitre I pour de plus amples détails). Ce résultat a également été obtenu par Lund *et al.* [LR89] en utilisant le

formalisme des fonctions de Green. Ces expressions ne font aucune autre hypothèse sur l'écoulement (structure, stationnarité, ...) hormis la présence d'une composante rotationnelle pour le champ de vitesse et une fréquence sonore très grande devant la fréquence caractéristique de l'écoulement.

Remarque : Pitaevskii [Pit59] a effectué un calcul similaire dans le cadre de la diffusion de phonons par des filaments de vorticité dans l'hélium superfluide.

Ces expressions analytiques reliant l'amplitude de l'onde diffusée à la composante rotationnelle d'un écoulement ont permis d'utiliser les ondes sonores comme sonde afin d'étudier des écoulements turbulents (voir le paragraphe 1.4).

1.3 Approche locale

Les tourbillons ont une importance capital dans la turbulence [CB86] et le développement des instabilités en mécanique des fluides [Ast93, HP99]. Il est ainsi pertinent de s'intéresser à la diffusion du son par un tourbillon isolé ou un ensemble de tourbillons dont on connaît précisément la structure. Ferziger [Fer74], O'Shea [O'S75], Tanaka et al. [TI82] ont ainsi calculé analytiquement l'amplitude de l'onde diffusée par des écoulements simples composé d'un ou plusieurs tourbillons. Il s'agit formellement du même type de travail que celui fait par Fabrikant et/ou Lund dans le cadre très général exposé ci-dessus. On peut donc étudier le comportement de la diffusion en fonction de la longueur d'onde du son incident, dans le cadre de la première approximation de Born, par un tourbillon donné.

Plus récemment, Boyer et al [BBL99, BL99] ont étudié la propagation d'une onde sonore dans un milieu désordonné composé de tourbillons. Il est alors nécessaire de faire appel à la deuxième approximation de Born afin de pouvoir prendre en compte les diffusions multiples dans le milieu.

L'ensemble de ces travaux ont été effectuées dans le cadre de l'approximation de Born et souvent dans le cadre de l'approximation du champ lointain. Plusieurs auteurs ont essayé de s'affranchir d'au moins une de ces deux contraintes :

- o dans la limite des grandes longueurs d'ondes : Fetter [Fet64] a exprimé l'amplitude de diffusion (dans la limite du champ lointain) pour un tourbillon isolé avec le formalisme des ondes partielles (voir le chapitre II); plus récemment, Ford *et al.* [FS99] ont décrit l'onde diffusée par un tourbillon à l'aide d'un développement en nombre de Mach dans les régions lointaines et proches de l'écoulement, puis d'un raccordement asymptotique ;
- o de manière très générale, Lund [Lun89] a exprimé formellement le champ sonore diffusé par un filament de vorticité, aussi bien en champ proche qu'en champ lointain. Cette expression permet par exemple de retrouver le résultat de Tanaka *et al.* [TI82] pour une paire de tourbillons filamenteux [Ber94] ;

- Colonius *et al.* [CLM94] ont réalisé une simulation numérique directe de la diffusion du son par différents écoulements et ont pu confirmer le rôle pertinent du tenseur de Lightill (1.7) dans le mécanisme de diffusion du son.

1.4 Lien avec les expériences de diffusion

De nombreuses expériences ont étudié l'interaction entre une onde sonore et un écoulement comportant de la vorticité [BS66, ST70, KB80, RdRTF97, OGG⁺98]. Cette interaction a aussi été mise à profit afin d'étudier en détail des écoulements plus ou moins bien définis :

- ◊ écoulement de von Kármán entre deux disques tournant dans le même sens et engendrant un tourbillon isolé [Lab96, MB97, MRM⁺99] ;
- ◊ écoulement de von Kármán produit dans le sillage d'un barreau [GEF82, Pin92, HP99, ESC00] ;
- ◊ détection de filaments de vorticité [DPF98] ou de structures localisées dans un écoulement turbulent [HP99, BMW99] ;
- ◊ caractérisation d'un tourbillon à l'aide de la méthode de renversement temporel [MMRF99, Man00].

2. Objectifs de ce travail

Même si les « diffuseurs » ont été identifiés (les gradients de vitesse de l'écoulement), les nombreux résultats sur la diffusion du son par un écoulement, ainsi que leur utilisation expérimentale, suscitent un grand nombre de questions qui ont motivées ce travail de thèse :

- quel est le mécanisme physique de diffusion dans le cas d'un fluide homogène et isotherme ? Les diffuseurs du son par l'écoulement ne sont généralement pas situés dans une région finie de l'espace et il est difficile de lier les variations de l'indice de réfraction du milieu aux fluctuations de vitesse, par opposition avec la diffusion du son par les variations de température ou de masse volumique où l'on peut définir clairement une variation de l'indice du milieu avec les fluctuations ;
- la contribution de la composante irrotationnelle de l'écoulement est-elle négligeable, comme cela est implicitement supposé par Fabrikant [Fab83] ?
- peut-on quantifier les approximations de Born et du champ lointain ?
- quelles sont les corrections à l'amplitude diffusée lorsque les approximations précédentes ne sont plus valables ?

Afin de répondre à ces différentes questions, nous avons choisi de nous concentrer sur des écoulements simples, à deux dimensions, composés d'un ou plusieurs tourbillons dont nous connaissons la structure analytique exacte. Ainsi, il nous a été possible d'étudier la diffusion du son dans différents régimes et d'explorer le domaine de validité des approximations mentionnées précédemment. Le problème de diffusion auquel nous nous intéressons est résumé sur la figure 2.1, qui introduit également des notations dont nous aurons besoin dans la suite : des « diffuseurs » de taille caractéristique l sont localisés dans un milieu diffusant de taille caractéristique L et soumis à une onde plane incidente monochromatique de longueur d'onde λ .

Nous avons donc développé plusieurs outils d'investigation :

- une méthode analytique, basée sur la méthode des ondes partielles, et nous permettant d'étudier de manière directe la structure du champ diffusé par un écoulement axisymétrique dans la limite des petites longueurs d'ondes (chapitre II) ;

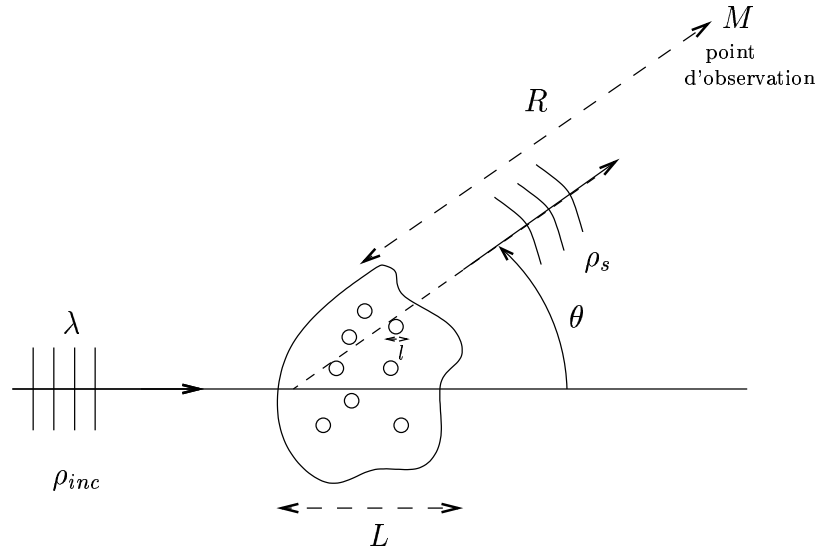


FIG. 2.1 – Définition générale du problème de diffusion : L est la taille caractéristique du volume diffusant, chaque diffuseur ayant une taille l .

- une simulation numérique directe des équations de la mécanique des fluides compressible, afin d'étudier la diffusion du son par un écoulement et d'analyser en détail l'interaction entre l'onde sonore et cet écoulement moyen (chapitre III) pour $\lambda \geq L$;
- une méthode numérique de tracé de rayons acoustiques, permettant de compléter les deux analyses précédentes dans la limite de l'acoustique géométrique (paragraphe 2 du chapitre I).

Rappelons que l'ensemble de ce travail est effectué sur des écoulements bidimensionnels, possédant ou non une circulation.

3. Présentation du document

Ce manuscrit est organisé en 5 chapitres :

- un chapitre comprenant une revue de plusieurs techniques couramment utilisées dans la modélisation de l'interaction son-écoulement, dans la limite de l'acoustique géométrique ainsi que dans le cas de l'équation d'ondes pour la diffusion (chapitre I). Nous avons également détaillé des résultats concernant l'interaction son-écoulement dans la limite géométrique (tracé de rayons), dans le cadre de la première approximation de Born (diffusion par un écoulement potentiel) ainsi que dans un cadre plus général de diffusion du son ;
- deux chapitres détaillant les outils que nous avons développés au cours de ce travail de thèse : la méthode des ondes partielles (chapitre II) que nous avons appliquée avec Christophe Coste (G.P.S., Paris 7) au cas des ondes sonores et une simulation numérique directe avec des conditions aux limites ouvertes, pour laquelle nous avons explicité un nouvel algorithme de traitement des conditions aux limites avec Dominique Astruc (I.M.F.T., Toulouse) ;
- un chapitre consacré à l'interaction entre une onde sonore et un écoulement de circulation nulle (chapitre IV) : dans ce cas, nous avons pu analyser en détail la validité des approximations employées dans la modélisation de l'interaction son-écoulement et étudier les corrections liées au viol de ce cadre limite. De plus, nous avons pu décomposer le mécanisme de diffusion du son, dans le cas d'un dipôle de vorticité ;
- un chapitre traitant de l'interaction son-écoulement dans le cas d'un tourbillon de circulation non nulle (chapitre V). Nous avons alors mis en évidence les deux rôles joués par l'écoulement lors de son interaction avec l'onde sonore : diffusion de l'onde incidente et advection des fronts d'ondes. Nous avons également comparé les résultats numériques avec ceux d'une expérience de diffusion du son par un tourbillon [LP98], ce qui nous a conduit à rédiger une publication soumise et qui est reproduite à la fin de ce chapitre.

Chapitre I

Revue sur la diffusion du son par un écoulement

*Wagner : [...] Que de peine, déjà, pour
qui veut acquérir
Les simples instruments pour accéder
aux sources.*

Goethe.

1. Acoustique géométrique

1.1 Introduction

Nous nous placerons dans ce chapitre dans le cadre de l'acoustique géométrique où la longueur d'onde sonore λ est beaucoup plus petite que la plus petite échelle caractéristique de l'écoulement : dans le cas simple de la figure 2.1 de l'introduction, $\lambda \ll l$. Cette limite est analogue à celle de l'optique géométrique et de nombreuses techniques d'étude de l'interaction son-écoulement sont des transpositions des méthodes utilisées en optique. Cependant, en acoustique, l'approche géométrique présente une difficulté supplémentaire : en plus d'une éventuelle variation spatio-temporelle de l'indice du milieu (due à des inhomogénéités de densité par exemple), ce dernier est en mouvement.

Le domaine de l'acoustique géométrique a été largement étudié car il s'agit du cas limite usuel lors de l'étude des phénomènes atmosphériques et océaniques. Blokhintzev et Jones [Blo46, Jon63] ont formalisé le traitement de l'acoustique géométrique à partir de l'eikonale. Lindsay [Lin48], en étudiant analytiquement la réfraction des rayons ainsi que le temps de vol d'une onde sonore, a observé un déphasage de l'onde acoustique lors de la traversé d'un tourbillon. Une approche quantitative de ce phénomène, en termes de rayons acoustiques a été proposée par Landau [LL89b] et largement utilisée par la suite pour l'étude de l'interaction entre une onde sonore et des tourbillons [Geo72, BKS72, MRM⁺99, ESC00].

Cette approche de Landau conduit au paradoxe suivant : la vorticit  tant la seule origine de la réfraction du son, un vortex ne dévie que les rayons acoustiques passant par son cœur et le son n'est pas réfracté par l'écoulement engendré par le tourbillon à l'extérieur du cœur. Comme nous le verrons, l'équation de Landau n'est en fait qu'une approximation à l'ordre 1 en nombre de Mach des phénomènes physiques, ce qui permet d'expliquer le paradoxe précédent. Il faut alors, afin d'effectuer le tracé de rayons dans le cas général, travailler sur un jeu d'équations traduisant l'évolution des coordonnées du rayon et du vecteur d'onde [Bro77, Lig92]. En présence de vorticité, les résultats obtenus sont bien sûr très proches de ceux obtenus à l'aide de l'équation de Landau [CLM94]. En dehors des caustiques, un traitement systématique de la propagation des rayons dans un milieu en mouvement a été proposé par Candel [Can77] et permet alors d'accéder à l'amplitude de l'onde sonore.

Cependant, comme le montre Jones [Jon63], accéder à l'amplitude de l'onde et à la répartition de l'énergie acoustique peut rapidement nécessiter un traitement math  ma-

tique assez lourd. En effet, il faut traiter de manière spécifiques les caustiques où l'approche géométrique précédente n'est plus valable. Comme alternative, nous proposerons au chapitre II une approche déjà utilisée par Coste *et al.* [CLU99, CL99] dans le cadre de l'interaction d'une onde de surface avec un tourbillon et permettant de s'affranchir de ces problèmes dans la limite $\mathcal{M} \ll 1$.

Nous introduirons dans ce chapitre les quantités habituellement employées en acoustique géométrique et nous nous intéresserons à la réfraction des rayons, dans le cas d'un milieu stationnaire, inhomogène et en mouvement. Nous établirons ensuite une équation d'ondes permettant l'étude de la diffusion du son dans le cadre de l'acoustique géométrique [Obu41] puis nous modéliserons la déformation des fronts d'onde de l'onde incidente par un écoulement moyen [KP87].

1.2 Équation de l'eikonale

Le point de départ de la plupart des théories ondulatoires dans la limite des petites longueurs d'onde λ_0 (optique géométrique [Det90, BW99], acoustique géométrique [LL89b]) est d'exprimer les champs sous la forme très générale

$$U(\vec{r}, t) = U_0(\vec{r}, t) \exp[ik_0 \Psi(\vec{r}, t)] \quad (1.1)$$

où $U_0(\vec{r}, t)$ est l'amplitude du champ U , que l'on suppose lentement variable dans l'espace et dans le temps et $k_0 = 2\pi/\lambda_0$. $\Psi(\vec{r}, t)$ est appelée fonction eikonale.

Remarque : dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω se propageant dans un milieu au repos de célérité c , l'eikonale s'écrit simplement

$$\Psi(\vec{r}, t) = (\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)/k_0 = \hat{k}_0 \cdot \vec{r} - c t \quad (1.2)$$

avec la relation de dispersion $\omega = ck_0$.

Le vecteur d'onde et la pulsation de l'onde sont alors définis par

$$\begin{cases} \omega &= -k_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \vec{k} &= k_0 \overrightarrow{\text{grad}} \Psi \end{cases} \quad (1.3)$$

et les équiphases, à l'instant t_0 , par

$$\Psi(\vec{r}, t_0) = C^{\text{te}}. \quad (1.4)$$

On pose \vec{n} la normale aux équiphases. Du fait de la relation (1.3), on en déduit que

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k} = \hat{k}. \quad (1.5)$$

Lorsque le milieu est en mouvement à la vitesse \vec{u} , en supposant une perturbation sonore de la forme (1.1), on peut déduire de la linéarisation des équations de conservation

de la masse, de la quantité de mouvement et de l'entropie (le milieu est supposé sans dissipation) l'équation de l'eikonale [Blo46, Bro77]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)^2 \Psi - c^2 \Delta \Psi = 0 \quad (1.6)$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme [Ost00]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \Psi = -c \|\overrightarrow{\text{grad}} \Psi\|. \quad (1.7)$$

si l'on ne considère qu'une onde progressive dans une direction donnée. Cette équation correspond à l'approximation d'ordre 0 d'un développement en puissance de $k_0 = 2\pi/\lambda \gg 1$ de la solution (1.1). Ainsi, à l'ordre $(k_0)^0$, les champs sonores auront la forme

$$U(\vec{r}, t) = U_{(k_0)^0} \exp [ik_0 \Psi(\vec{r}, t)] \quad (1.8)$$

ce qui suppose que l'amplitude de l'onde est constante ($U_{(k_0)^0} = C^{\text{te}}$).

Il est aussi possible d'obtenir l'amplitude et l'énergie du champ sonore en poursuivant le développement en λ à l'ordre 1. Cependant, ce traitement n'est valable que loin des caustiques (zone où les rayons se croisent). Au niveau des caustiques, un traitement mathématiquement plus lourd est nécessaire afin de prendre en compte les effets de la diffraction de manière analogue au cas de l'optique géométrique [Kel62], à l'aide de fonctions d'Airy [LL89a] (paragraphe 54 et 59), [Jon63]. Ainsi, nous ne nous intéresserons pas à la répartition de l'énergie acoustique dans le cas de l'approximation de l'eikonale. Comme le souligne Broadbent [Bro77], d'un point de vue pratique, nous considérerons qu'en dehors des caustiques, le traitement proposé est valable, les caustiques correspondant alors à des « pics » d'énergie acoustique, comparables par exemple au foyer d'une lentille en optique. Nous proposerons au chapitre II une méthode permettant d'accéder à l'amplitude sonore par un traitement global du problème de l'interaction d'une onde sonore avec un tourbillon dans la limite $\mathcal{M} \ll 1$.

Remarque : l'équation (1.6) se réduit à une équation de propagation d'ondes standard dans le cas d'un milieu au repos, ce qui est cohérent avec l'approche de l'eikonale qui nous avons mise en œuvre.

Remarque : Landau [LL89b] (paragraphe 67) propose une autre équation pour l'eikonale, en se basant sur la relation de dispersion $\omega^2 = c^2 k^2$ et sur les relations (1.3) :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 = 0 \quad (1.9)$$

Cependant, cette relation n'est valable que pour un milieu immobile dans lequel les inhomogénéités n'ont de conséquence que sur la vitesse du son c , contrairement à la relation (1.6) qui prend en compte le mouvement global du fluide.

1.3 Relation de dispersion

On déduit de l'équation (1.7) la relation de dispersion

$$\omega = c k + \vec{u} \cdot \vec{k}, \quad (1.10)$$

la vitesse de phase de l'onde sonore

$$\vec{c}_\Psi = \left(\frac{\omega}{k} \right) \vec{n} = (c + \vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (1.11)$$

et sa vitesse de groupe

$$\vec{c}_g = c_g \vec{t} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = c \vec{n} + \vec{u} \quad (1.12)$$

où \vec{t} est le vecteur tangent à la direction de propagation de l'énergie. La figure I.1 montre la structure générale de l'onde par rapport à une équiphase $\Psi = \Psi_0$.

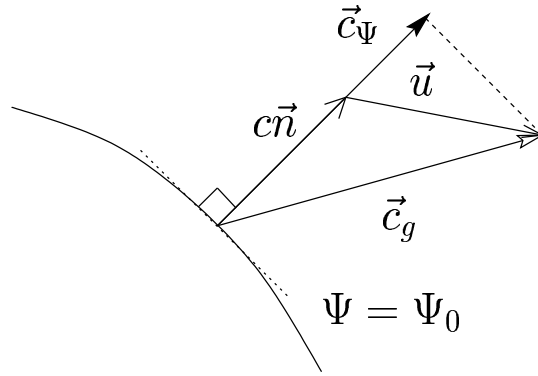


FIG. I.1 – Structure de l'onde sonore pour une équiphase $\Psi = \Psi_0$ (d'après [Kor53]).

On remarque que la vitesse de phase et la vitesse de groupe ne sont pas colinéaires et que $c_g \leq c_\Psi$. On se trouve dans une situation analogue à celle rencontrée lors de l'étude des milieux biréfringents en optique dans lesquels la direction de propagation de l'énergie ($\hat{c}_g = \vec{t}$) ne coïncide plus avec la direction de propagation de la phase ($\hat{c}_\Psi = \vec{n} = \hat{k}$) car le milieu optique est fortement anisotropes. Ainsi, la trajectoire d'un rayon et celle du vecteur d'onde ne sont pas identiques.

1.4 Évolution du vecteur d'onde

À partir de la relation de dispersion (1.10), on peut obtenir la trajectoire générale du vecteur d'onde \vec{k} . En effet, l'équation (1.7) peut être vue comme l'équation de Hamilton-Jacobi régissant le mouvement d'une particule matérielle. En acoustique géométrique, l'eikonale Ψ correspond à l'action et les relations (1.3) sont analogues à la définition de l'énergie de la particule H et de son impulsion \vec{p} :

$$H \longleftrightarrow \omega \quad \text{et} \quad \vec{p} \longleftrightarrow \vec{k}. \quad (1.13)$$

qui ne sont en fait qu'un exemple des relations de de Broglie. Les équations de Hamilton [Gol80]

$$\begin{cases} \dot{\vec{p}} &= - \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \right)_{\vec{p}} \\ \dot{\vec{r}} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \right)_{\vec{r}} \end{cases} \quad (1.14)$$

sont alors transposables en acoustique géométrique sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\vec{k}} &= - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}} \right)_{\vec{k}} \\ \dot{\vec{r}} &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \right)_{\vec{r}} \end{cases} \quad (1.15)$$

La dernière relation est bien sûr analogue à la relation (1.12) définissant la vitesse de groupe de l'onde

$$\vec{c}_g = \dot{\vec{r}} = c \vec{n} + \vec{u}. \quad (1.16)$$

La première relation permet de déduire la trajectoire des vecteurs d'onde :

$$\frac{d\vec{k}}{d\tau} = -k \overrightarrow{\text{grad}} c - \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{k} \cdot \vec{u})_{\vec{k}} \quad (1.17)$$

que l'on peut écrire, à l'aide de la relation d'analyse vectorielle

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{a} + \vec{a} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{b} + \vec{b} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}.$$

sous la forme

$$\frac{d\vec{k}}{d\tau} = \dot{\vec{k}} = -k \overrightarrow{\text{grad}} c - (\vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} - \vec{k} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{u}) \quad (1.18)$$

où τ est homogène à un temps.

Les vecteurs d'onde sont donc à la fois réfractés par les inhomogénéités de la vitesse du son et par les gradients de vitesse, présents à la fois sous la forme de gradient dans la direction du vecteur d'onde et sous la forme de vorticité. On peut difficilement déduire de l'équation précédente une équation pour la trajectoire des rayons acoustiques ($d\vec{n}/d\tau$). La solution du problème consiste alors à résoudre simultanément les équations (1.11) et (1.17) en utilisant la définition (1.5). C'est ce que nous ferons numériquement au paragraphe 2.1.2 du chapitre II à l'aide des équations du paragraphe 1.5.3.

Cependant, différentes approximations peuvent être faites selon le problème étudié, et on peut alors en déduire une équation simple pour les rayons acoustiques si le milieu est au repos ou en présence de vorticité.

1.5 Équation des rayons pour des milieux stationnaires

1.5.1 Réfraction dans un milieu inhomogène et au repos

Dans le cas d'un milieu inhomogène au repos, les rayons acoustiques ne seront réfractés que par les inhomogénéités d'indice acoustique, qui induisent des variations spatiales de la vitesse du son. La trajectoire du vecteur d'onde (1.18) se met sous la forme :

$$\frac{d\vec{k}}{d\tau} = \dot{\vec{k}} = -k \overrightarrow{\text{grad}} c \quad (1.19)$$

et la relation de dispersion est simplement

$$\omega = c(\vec{r}) k. \quad (1.20)$$

d'où $\vec{c}_\Psi = c\vec{n} = \hat{k} = \vec{c}_g$. Le milieu est inhomogène et présente un caractère réfringent mais ne présente pas de caractère biréfringent (pas d'anisotropies), d'où $\vec{t} = \vec{n} = \hat{k}$. En utilisant la définition (1.5) de \vec{n} , on a alors $\vec{k} = (\omega/c) \vec{n}$, ce qui conduit à

$$\frac{d\vec{n}}{d\tau} = -\overrightarrow{\text{grad}} c + \vec{n} (\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} c) \quad (1.21)$$

en utilisant la relation

$$\frac{dc}{d\tau} = (\overrightarrow{\text{grad}} c) \frac{d\vec{r}}{d\tau} = (\overrightarrow{\text{grad}} c) c \vec{n}. \quad (1.22)$$

En posant $dl = c d\tau$ l'élément de longueur du rayon parcouru pendant $d\tau$, on arrive à [LL89b] :

$$\frac{d\vec{t}}{dl} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} c}{c} + \frac{\vec{t}}{c} (\vec{t} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} c). \quad (1.23)$$

Cette équation différentielle permet de calculer la trajectoire des rayons acoustiques dans un milieu stationnaire, inhomogène et au repos. On peut ainsi étudier la réfraction des rayons dans un milieu stratifié [Chu75, Ost00]. Cette approche peut être complétée en traitant également l'amplitude sonore [WB85].

1.5.2 Réfraction en présence de vorticité

En présence de vorticité, en posant $\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}$ la vorticité de l'écoulement stationnaire, la trajectoire du vecteur d'onde (1.18) se met sous la forme

$$\frac{d\vec{k}}{d\tau} = \dot{\vec{k}} = -k \overrightarrow{\text{grad}} c - (\vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} - \vec{k} \wedge \vec{\Omega}. \quad (1.24)$$

La présence de vorticité introduit une anisotropie dans l'écoulement, et on se retrouve ainsi dans le cas général où $\vec{t} \neq \vec{n}$.

La relation de dispersion reste sous la forme générale (1.10)

$$\omega = c(\vec{r}) k + \vec{u} \cdot \vec{k} \quad (1.25)$$

et la vitesse de groupe s'exprime par la relation (1.12)

$$\vec{c}_g = c \vec{n} + \vec{u} \quad (1.26)$$

car il faut prendre en compte les variations de la vitesse du son dues à la présence de l'écoulement. Le calcul des trajectoires des rayons nécessite de calculer la quantité

$$\frac{d(k\vec{c}_g)}{d\tau} = \left(\frac{d(kc_g)}{d\tau} \right) \vec{t} + k c_g \left(\frac{d\vec{t}}{d\tau} \right) \quad (1.27)$$

à l'aide de la relation de dispersion et de la relation (1.24). On peut alors déduire la trajectoire des rayons en comparant l'expression obtenue avec la relation ci-dessus (1.27) car

$$(\vec{t})^2 = 1 \implies \vec{t} \cdot \left(\frac{d\vec{t}}{d\tau} \right) = 0. \quad (1.28)$$

Soit U la vitesse caractéristique de l'écoulement. Le nombre de Mach $\mathcal{M} = U/c$ est supposé petit ($\mathcal{M} \ll 1$). Cela signifie que les perturbations dues à l'écoulement sont faibles. Les deux derniers termes du membre de droite de (1.24) sont du même ordre de grandeur. Par contre,

$$\frac{\|k \overrightarrow{\text{grad}} c\|}{\|(\vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u}\|} \simeq \mathcal{M} \quad (1.29)$$

d'après l'annexe 1.A et peut donc être négligé devant les deux autres termes. Ainsi, la trajectoire d'un vecteur d'onde se réduit à :

$$\dot{\vec{k}} = -(\vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} - \vec{k} \wedge \overrightarrow{\Omega} \quad (1.30)$$

à des termes d'ordre supérieur en \mathcal{M} près.

$$\begin{aligned} \frac{d(k\vec{c}_g)}{d\tau} &= \frac{d(c\vec{k})}{d\tau} + \frac{d(k\vec{u})}{d\tau} \\ &\simeq c \dot{\vec{k}} + \dot{k} \vec{u} + k \dot{\vec{u}} \\ &\simeq c \dot{\vec{k}} + k \dot{\vec{u}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

où on a négligé le terme $\vec{k} \dot{c} = \vec{k} (\overrightarrow{\text{grad}} c) \cdot \vec{r}$ qui est d'ordre supérieur (voir l'annexe 1.A) et le terme $k \dot{\vec{u}}$ devant le terme $c \dot{\vec{k}}$ dans l'hypothèse d'un petit nombre de Mach. Or, le long d'une trajectoire du vecteur d'onde,

$$\dot{\vec{u}} = \frac{d(\vec{u})}{d\tau} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}}_{\vec{0}} + (\vec{c}_g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u}$$

$$\begin{aligned}
&= (c \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} \\
&\simeq (c \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u}
\end{aligned} \tag{1.32}$$

en utilisant la définition de la vitesse de groupe (1.12) et en négligeant le terme d'ordre supérieur en \mathcal{M} pour l'écoulement supposé stationnaire :

$$\frac{\|(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u}\|}{\|(c \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u}\|} \simeq \frac{U^2}{c U} = \mathcal{M}. \tag{1.33}$$

En reportant (1.32) dans (1.31) et en utilisant (1.30) ($\vec{n} = \vec{k}/k$), on en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{d(k \vec{c}_g)}{d\tau} &= -c (\vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} - c \vec{k} \wedge \overrightarrow{\Omega} + (c \vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} \\
&= -c \vec{k} \wedge \overrightarrow{\Omega} \\
&= \overrightarrow{\Omega} \wedge (k c_g \vec{t} - k \vec{u}) \\
&\simeq k c_g \overrightarrow{\Omega} \wedge \vec{t} \quad \perp \vec{t}.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

En comparant cette relation avec l'équation (1.27), et en introduisant l'élément de rayon $dl = c_g d\tau \simeq c_0 d\tau$ correspondant à un parcours de $d\tau$, on arrive à [LL89b] (paragraphe 67) :

$$\frac{d\vec{t}}{dl} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \vec{t}/c_0 \tag{1.35}$$

où \vec{t} représente le vecteur tangent au rayon acoustique considéré et c_0 est la vitesse du son dans le milieu au repos.

Rappelons que la relation (1.35) n'est valable qu'en présence de vorticité (ce qui nous a permis de négliger un terme d'ordre supérieur dans (1.32)) et en négligeant les corrections d'ordre \mathcal{M}^2 , notamment dans la vitesse du son.

1.5.3 Cas général

L'équation de Landau (1.35) montre que l'absence de vorticité ou la présence d'un vortex ponctuel (tout en restant dans la limite de l'acoustique géométrique) implique que les rayons acoustiques ne seront pas déviés. Ce n'est en réalité pas le cas car il faut alors prendre en compte les termes d'ordre supérieur en \mathcal{M} . Ainsi, ce n'est pas la vorticité qui réfracte les rayons acoustiques mais bien les gradients de vitesse. La composante rotationnelle, lorsqu'elle existe, a simplement un effet plus important que les inhomogénéités de densité engendrées par l'écoulement ou que la composante irrotationnelle du champ de vitesse.

De manière générale, sans aucune approximation, il faut donc prendre en compte la vitesse locale du son (qui peut-être différente de celle dans un milieu au repos) et l'ensemble des dérivées spatiales du champ de vitesse (composantes symétriques et antisymétriques du tenseur des déformations d'une particule fluide [Bat94] (paragraphe 2.3).

Les rayons symbolisent les trajectoires de l'énergie acoustique. Ainsi, en posant $\vec{r}(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))$ la trajectoire d'un rayon paramétrée par τ , la vitesse de groupe \vec{c}_g est définie par

$$\vec{c}_g = \frac{d\vec{r}}{d\tau} \quad (1.36)$$

En comparant cette expression avec (1.12), la trajectoire d'un rayon acoustique est déterminée par :

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = c\vec{n} + \vec{u} \quad (1.37)$$

où $\vec{n} = \vec{k}/k$ d'après (1.5).

En utilisant la relation (1.17), il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{d\tau} &= c(\vec{r}) \frac{\vec{k}}{k} + \vec{u}(\vec{r}) \\ \frac{d\vec{k}}{d\tau} &= -k \overrightarrow{\text{grad}} c - \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{k} \cdot \vec{u})_{\vec{k}}. \end{cases} \quad (1.38)$$

La réfraction apparaît donc comme la conséquence de deux phénomènes physiques :

- la présence de fluctuations de la vitesse du son, qui peuvent être liées à des inhomogénéités de masse volumique, de pression ou de température (phénomène analogue aux variations d'indice en optique) ;
- la présence d'un écoulement moyen qui réfracte les rayons via sa vitesse et ses gradients de vitesse.

Rappelons de plus que les relations (1.38) sont valables sans aucune hypothèse sur le nombre de Mach \mathcal{M} , hormis le fait que l'on puisse se placer dans le cadre de l'équation de l'eikonale (voir le paragraphe 1.1). En général, \mathcal{M} intervient implicitement, car pour des nombres de Mach grands, la présence de caustiques rend ce traitement incorrect (voir le paragraphe 2). Ces relations peuvent aussi devenir inexactes dans le cas de fortes variations de la vitesse du son c [Jon63], ce qui peut également être lié à des \mathcal{M} trop importants, par exemple dans le cas de tourbillons.

1.6 Équation d'ondes en acoustique géométrique

1.6.1 Introduction

Obukhov [Obu41] étudie la diffusion du son par les écoulements de faible nombre de Mach et dans le régime des petites longueurs d'onde. Il emploie pour cela une équation

d'ondes analogue à l'équation de l'eikonale (1.6), mais pour le potentiel des vitesses de la perturbation sonore ϕ_s ($\vec{v}_s = \overrightarrow{\text{grad}} \phi_s$) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)^2 \phi_s - c^2 \Delta \phi_s = 0 \quad (1.39)$$

où \vec{v}_0 est la vitesse de l'écoulement moyen.

Nous allons généraliser cette relation pour la propagation d'une onde sonore (ρ_s, \vec{v}_s, p_s) de célérité c dans un milieu de masse volumique moyenne ρ_0 , de vitesse moyenne \vec{v}_0 et de pression moyenne p_0 : dans le cadre de l'acoustique géométrique et sous l'hypothèse d'un petit nombre de Mach $\mathcal{M} = U_0/c \ll 1$, la pression sonore p_s satisfait alors à l'équation d'ondes

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)^2 p_s - c^2 \Delta p_s = 0. \quad (1.40)$$

1.6.2 Linéarisation des équations de la dynamique

Le point de départ est la linéarisation des équations de la dynamique des fluides autour de l'écoulement moyen (ρ_0, \vec{v}_0) , en supposant que l'onde sonore est une petite perturbation, ce qui permet de négliger les termes quadratiques.

On pose $\rho = \rho_0 + \rho_s$ la masse volumique du fluide, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_s$ sa vitesse et $p = p_0 + p_s$ sa pression.

L'écoulement moyen est supposé stationnaire (son temps caractéristique d'évolution est supposé beaucoup plus grand que la période des ondes sonores) et à divergence nulle :

$$\text{div } \vec{v}_0 = 0 \Rightarrow \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_0 = 0, \quad (1.41)$$

ce qui signifie que $\mathcal{M} \ll 1$ (voir l'annexe 3.C de ce chapitre).

L'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.42)$$

et l'équation d'Euler

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} p \quad (1.43)$$

s'expriment alors, pour l'écoulement moyen :

$$\text{div}(\vec{v}_0) = 0 \quad (1.44.a)$$

$$\rho_0 (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} p_0 \quad (1.44.b)$$

et pour la perturbation sonore, en négligeant les termes quadratiques

$$\frac{D\rho_s}{Dt} + \text{div}(\rho_0 \vec{v}_s) = 0 \quad (1.45.a)$$

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}_s}{Dt} + \rho_0 (\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_0 + \rho_s (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_0 = -c^2 \overrightarrow{\text{grad}} \rho_s \quad (1.45.b)$$

en introduisant la dérivée particulaire par rapport au champ de vitesse moyen \vec{v}_0 :

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \quad (1.46)$$

et la relation

$$p_s = c^2 \rho_s \quad (1.47)$$

entre la pression et la masse volumique de l'onde sonore. La soustraction de la divergence de (1.45.a) et de la dérivée particulaire de (1.45.b) conduit à :

$$\begin{aligned} & \frac{D^2 \rho_s}{Dt^2} - \text{div} \left(c^2 \overrightarrow{\text{grad}} \rho_s \right) \\ &= \text{div} \left[\rho_s \left(\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}_0 + \rho_0 \left(\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}_0 \right] + \text{div} \left[\rho_0 \frac{D \vec{v}_s}{Dt} \right] - \frac{D}{Dt} \text{div} [\rho_0 \vec{v}_s] \end{aligned} \quad (1.48)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{D^2 \rho_s}{Dt^2} - \underbrace{c^2 \Delta \rho_s}_{C_0} = \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \left[2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 v_{si}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_s v_{0i}) \right] + \overrightarrow{\text{grad}} (c^2) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_s \quad (1.49)$$

en utilisant le résultat (1.79) de l'annexe 1.B. Or,

$$\frac{D^2 \rho_s}{Dt^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 \rho_s}{\partial t^2}}_{T_1} + \underbrace{2 \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial \rho_s}{\partial t}}_{T_2} + \underbrace{(\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}})^2 \rho_s}_{T_3}. \quad (1.50)$$

Ainsi, en notant U , L la vitesse et la taille caractéristique de l'écoulement,

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{C_0} &\simeq \frac{c^2 \rho_s \lambda^2}{\lambda^2 c^2 \rho_s} = 1 \\ \frac{T_2}{C_0} &\simeq \frac{U \rho_s \lambda^2}{\lambda^2 c \rho_s} = \mathcal{M} \\ \frac{T_3}{C_0} &\simeq \frac{U^2 \rho_s \lambda^2}{\lambda^2 c^2 \rho_s} = \mathcal{M}^2. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Dans la limite $\mathcal{M} \ll 1$, les termes dominants dans le membre de gauche de (1.49) sont donc T_1 et C_0 .

1.6.3 Simplifications dans le cas géométrique

On note

$$\begin{aligned} C_{11} &= \rho_0 \frac{\partial v_{si}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i}, & C_{12} &= v_{si} \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} \\ C_{21} &= v_{0i} \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_s}{\partial x_j}, & C_{22} &= \rho_s \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.52)$$

et

$$C_3 = \overrightarrow{\text{grad}}(c^2) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_s. \quad (1.53)$$

Soient U , L la vitesse et la taille caractéristique de l'écoulement. Posons $\beta = kL = 2\pi L/\lambda$. Les deux premiers termes ont alors pour ordre de grandeur

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}}{C_0} &\simeq \frac{\rho_0 U v_s \lambda}{c^2 L} = \frac{U^2 \lambda}{c^2 L} = \frac{\mathcal{M}^2}{\beta} \\ \frac{C_{12}}{C_0} &\simeq \frac{\rho_0 U v_s \lambda^2}{L^2 c^2 \rho_s} = \frac{U^2 \lambda^2}{c^2 L^2} = \frac{\mathcal{M}^2}{\beta^2} \end{aligned} \quad (1.54)$$

en utilisant la relation (1.45.a) qui conduit, dans le cas d'une propagation sonore, à

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \simeq \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_s) \implies \rho_s c \simeq \rho_0 v_s. \quad (1.55)$$

Les autres termes ont pour ordre de grandeur

$$\begin{aligned} \frac{C_{21}}{C_0} &\simeq \frac{U^2 \lambda}{c^2 L} = \frac{\mathcal{M}^2}{\beta} \\ \frac{C_{22}}{C_0} &\simeq \frac{U^2 \lambda^2}{c^2 L^2} = \frac{\mathcal{M}^2}{\beta^2} \\ \frac{C_3}{C_0} &\simeq \frac{\gamma U^2 \lambda}{c^2 L} \simeq \frac{\mathcal{M}^2}{\beta} \end{aligned} \quad (1.56)$$

en utilisant pour C_3 la relation (1.75) de l'annexe 1.A.

Remarque : ces ordres de grandeur sont conformes à ceux effectuées par [UL97] pour l'étude des dislocations lors de l'interaction d'une onde sonore et d'un vortex.

Dans la limite de l'acoustique géométrique, $\lambda \ll L \implies \beta \gg 1$. Le nombre de Mach de l'écoulement étant supposée petit, on a

$$C_{11}, C_{21} \ll C_0, \quad C_{12}, C_{22} \ll C_0, \quad C_3 \ll C_0$$

et l'équation (1.49) se réduit alors, pour la masse volumique et la pression de l'onde sonore, à :

$$\left[\frac{D^2}{Dt^2} - c_0^2 \Delta \right] \rho_s = 0 \quad (1.57.a)$$

$$\left[\frac{D^2}{Dt^2} - c_0^2 \Delta \right] p_s = 0 \quad (1.57.b)$$

en utilisant la relation (1.47), où on a remplacé la vitesse du son c par la vitesse du son c_0 dans un milieu au repos.

L'équation (1.57) traduit l'advection de l'onde sonore par l'écoulement moyen (D/Dt) mais aussi la diffusion par les gradients de vitesse, puisqu'il s'agit d'une équation d'ondes.

Ainsi, il n'est pas possible de séparer l'effet purement géométrique de déformation des fronts d'onde qui résulte de l'advection par l'écoulement moyen du phénomène de diffusion.

Remarque : Il est important de conserver dans le développement les termes d'ordre \mathcal{M}^2 . En effet, les différents termes C_{ij} ne sont négligeables que dans le cadre des petites longueurs d'onde. Dans le cas contraire, ces derniers termes pourraient être dominants. Par exemple, dans le cas des grandes longueurs d'onde, si $\beta \simeq \mathcal{M}$, les deux termes C_{12} et C_{22} sont du même ordre de grandeur que C_0 .

Cette relation est analogue à celle obtenue par Coste *et al.* [CLU99] dans le cadre des petites longueurs d'onde, pour modéliser l'interaction entre une onde de surface et un tourbillon en eau peu profonde. Cela n'est pas surprenant car il y a une analogie assez forte entre les ondes sonores et les ondes de surface en eau peu profonde, appelées aussi ondes gravitationnelles longues [LL89b] (paragraphe 12).

Remarque : En posant, de manière analogue à (1.1),

$$\rho_s(\vec{r}, t) = \rho_{s_0}(\vec{r}, t) \exp[ik_0 \Psi(\vec{r}, t)] \quad (1.58)$$

où $\rho_{s_0}(\vec{r}, t)$ est lentement variable dans le temps et dans l'espace, on retrouve bien à l'ordre 0 l'équation de l'eikonale (1.6).

1.7 Déformation des fronts d'onde par l'advection

1.7.1 Introduction

La déformation des fronts d'ondes de l'onde incidente par l'écoulement moyen doit dans certains cas être prise en compte afin de définir clairement les processus de diffusion ayant lieu lors de l'interaction d'une onde sonore avec un écoulement. Dans le cas d'un tourbillon seul à circulation non nulle, une onde plane n'est en effet pas une solution exacte de l'équation d'ondes, puisque la vitesse du tourbillon décroît en $1/r$. L'équation (1.57) ne se réduit ainsi jamais à une équation d'ondes « classique » de propagation dans un milieu au repos, même pour $r \rightarrow \infty$.

La prise en compte de la déformation des fronts d'onde nécessite de travailler dans le cadre de l'acoustique géométrique en utilisant le formalisme de l'eikonale que nous avons développé au début de ce chapitre.

Une première méthode consiste à poser :

$$\Psi(\vec{r}, t) = -\omega t/k_0 + \Phi(\vec{r}) \quad (1.59)$$

ce qui conduit, à partir de (1.6), à

$$c_0 - \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = -\|\overrightarrow{\text{grad}} \Phi\|. \quad (1.60)$$

et à résoudre cette relation pour un champ de vitesse donné. On peut ainsi reconstruire l'onde sonore incidente.

Nous utiliserons une méthode différente, développée par Klimov *et al.* [KP87] pour étudier l'influence de la déformation de l'onde sonore incidente par un tourbillon afin de corriger la divergence de l'amplitude de diffusion dans la direction incidente.

1.7.2 Équation d'évolution de la phase

Soit une onde sonore ρ_i, \vec{v}_i , monochromatique à la pulsation ω , interagissant avec un écoulement moyen stationnaire $\rho_0(\vec{r}), \vec{v}_0(\vec{r})$ de taille caractéristique L et de vitesse caractéristique $U \ll c$. Cette interaction peut s'écrire sous la forme :

$$i\omega \rho_s = \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_s) + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_s \quad (1.61.a)$$

$$i\omega \vec{v}_s = (\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_s + \frac{c^2}{\rho_0} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_s \quad (1.61.b)$$

à l'ordre $\mathcal{M} \ll 1$. Nous ne nous intéressons pas ici au phénomène de diffusion à proprement parler mais juste à la déformation d'une onde plane incidente lors de sa propagation dans l'écoulement moyen. Ainsi, on pose pour la masse volumique

$$\rho_i = \rho_{i0} \exp \left[-i\omega t + i\vec{k}_i \cdot \vec{r} + i\varphi_r(\vec{r}) \right]. \quad (1.62)$$

La déformation des fronts d'ondes est uniquement prise en compte dans le terme de phase $\varphi_r(\vec{r})$ ($\rho_{i0} = C^{te}$), qui est une variante de l'eikonale telle que nous l'avons définie précédemment dans la relation (1.1). On définit de même $\varphi_v(\vec{r})$ pour la vitesse de l'onde sonore. En substituant l'expression précédente dans (1.61), on obtient :

$$i\omega \rho_i = i\rho_0 \vec{v}_i \cdot (\vec{k} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi_v) + i\vec{v}_0 \rho_i \cdot (\vec{k}_i + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi_r) \quad (1.63.a)$$

$$i\omega \vec{v}_i = (\vec{v}_i \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_0 + i\vec{v}_0 \vec{v}_i \cdot (\vec{k}_i + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi_v) + i\frac{c^2 \rho_i}{\rho_0} (\vec{k}_i + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi_r) \quad (1.63.b)$$

La combinaison $\vec{v}_0 \times (1.63.a) - \rho_0 \times (1.63.b)$ conduit à une équation ne faisant intervenir que la phase φ_r :

$$i\rho_i (\vec{k}_i + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi_r) c^2 (\mathcal{M}^2 - 1) = i\omega \rho_i \vec{v}_0 - \rho_0 [i\omega \vec{v}_i - (\vec{v}_i \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_0]. \quad (1.64)$$

L'hypothèse d'un faible nombre de Mach conduit alors, dans le cadre géométrique $\lambda \ll L$, à :

$$-ic^2 \rho_i \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi_r = i\omega \rho_i \vec{v}_0 + ic^2 \rho_i \vec{k}_i - i\rho_0 \omega \vec{v}_i \quad (1.65)$$

car

$$\frac{\|\omega \vec{v}_i\|}{\|(\vec{v}_i \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_0\|} \simeq \frac{v_i c}{\lambda} \frac{L}{v_i U} = \frac{L}{\lambda \mathcal{M}} \gg 1. \quad (1.66)$$

Or, pour de faibles nombres de Mach, on peut écrire l'équation (1.61.b) sous la forme

$$i\omega \vec{v}_s \simeq \frac{c^2}{\rho_0} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_s \implies \rho_0 \omega \vec{v}_i = c^2 \rho_i \vec{k}_i \quad (1.67)$$

à l'ordre 0. Ainsi, (1.65) devient

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_r = -\frac{\omega}{c^2} \vec{v}_0. \quad (1.68)$$

La projection de cette dernière relation selon la direction de propagation \hat{k}_i conduit alors à :

$$(\hat{k}_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \varphi_r = -\frac{\omega}{c^2} (\hat{k}_i \cdot \vec{v}_0) \quad (1.69)$$

que l'on peut écrire sous la forme plus simple

$$\frac{d\varphi_r}{dk_i}(\vec{r}) = -\frac{\omega}{c^2} [\hat{k}_i \cdot \vec{v}_0(\vec{r})]. \quad (1.70)$$

Cette relation est analogue à la relation intégrale proposé par Roux *et al.* [RdRTF97] et Manneville *et al.* [MRM⁺99] pour la mesure du déphasage d'une onde sonore lors de la traversée d'un écoulement tourbillonnaire. On constate que le gradient de déphasage est directement proportionnel à la vitesse $\vec{v}_0 \cdot \hat{k}_i$ de l'écoulement dans la direction de propagation \hat{k}_i et que l'effet est cumulatif si le signe de $\vec{v}_0 \cdot \hat{k}_i$ reste le même lors de la propagation.

On peut interpréter physiquement la relation (1.70) en utilisant une analogie cinématique dans le cas d'une onde plane : les zones des fronts d'ondes soumises une vitesse parallèle à la direction de propagation du son vont être accélérées par l'écoulement, tandis que celles soumises à une vitesse opposée à la direction de propagation du son seront ralenties. Nous verrons au paragraphe 2.6.2 du chapitre V un exemple de déformation des fronts d'ondes, dû uniquement à la réfraction géométrique par l'écoulement.

Rappelons que cette équation n'est valable que dans le cadre de l'interaction entre une onde sonore et un écoulement à faible nombre de Mach. De plus, elle n'est en toute rigueur valable que dans le cadre des petites longueurs d'onde et ne traduit que la déformation des fronts d'ondes, supposés linéaires en amont, lors de la traversée de l'écoulement.

1.8 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre différentes techniques permettant d'étudier l'interaction entre une onde sonore et un écoulement moyen dans le cadre de l'acoustique géométrique.

La plus couramment utilisée est le tracé de rayons, qui donne, même sans faire un traitement particulier des caustiques, la répartition qualitative de l'énergie acoustique. Cette méthode est très utilisée dans la modélisation de l'interaction son-écoulement dans le cadre des phénomènes atmosphériques [Lin48, Kor53, Ost00] et des phénomènes océaniques [WB85, Pol85, SK90], mais aussi dans de nombreux travaux d'étude de l'interaction son-vorticité [Geo72, Naz94, CLM94, Man00, ESC00]. Ce traitement donne des résultats satisfaisants mais ne donne pas accès à l'amplitude sonore à cause de la présence de caustiques, dont le traitement mathématique s'avère peu aisé.

Une autre technique consiste à utiliser une équation d'ondes « modifiée » afin de prendre en compte l'effet de l'écoulement moyen sur les fronts d'ondes [Obu41, KP87, Kli88, Obu94]. Ceci permet notamment d'étudier les effets de diffusion et de diffraction qui n'apparaissent pas dans la théorie de base du tracé de rayons acoustiques.

Nous proposerons au chapitre II une autre approche de ces phénomènes dans le cadre de l'acoustique géométrique, à l'aide du formalisme des ondes partielles.

Annexes

1.A Estimation du gradient de c

L'écoulement moyen étant supposé stationnaire et sans dissipation, on a, d'après l'équation d'Euler :

$$(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} = - \frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} p_0. \quad (1.71)$$

Supposons que le fluide puisse être assimilé à un gaz parfait. Dans ce cas, la vitesse du son est définie par

$$c^2 = \frac{\gamma p_0(\vec{r})}{\rho_0(\vec{r})} \quad (1.72)$$

avec $\gamma = C_p/C_v$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 2 c \overrightarrow{\text{grad}} c &= \gamma \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{p_0}{\rho_0} \right) \\ &= \frac{(\gamma - 1)}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} p_0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

en utilisant la relation qui traduit l'isentropie des transformations subies par le fluide assimilé à un gaz parfait

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \implies \overrightarrow{\text{grad}} \rho_0 = \frac{1}{c^2} \overrightarrow{\text{grad}} p_0. \quad (1.74)$$

On en déduit alors, en utilisant (1.71),

$$\overrightarrow{\text{grad}} c = \frac{(1 - \gamma)}{2 c} (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u}. \quad (1.75)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\|k \overrightarrow{\text{grad}} c\|}{\|(\vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u}\|} &\simeq \frac{k (1 - \gamma) U^2}{c k U} \simeq \frac{U}{c} = \mathcal{M} \\ \frac{\| \overbrace{\vec{k} (\overrightarrow{\text{grad}} c)}^{\vec{c}_g} \|}{\|c \vec{k}\|} &\simeq \frac{k U^2 \| (c \vec{n} + \vec{u}) \|}{c^2 \| (\vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} \|} \simeq \frac{k U^2 c}{c^2 k U} = \mathcal{M} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Remarque : cette estimation est cohérente avec l'estimation effectuée dans [BBL99] pour l'ordre de grandeur des différents termes intervenant dans la diffusion du son par la vorticité.

1.B Simplification de l'équation d'ondes en acoustique géométrique

Le second membre de l'expression (1.48) peut se simplifier. En effet,

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \frac{D\vec{v}_s}{Dt} &= \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \rho_0 \left(\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}_s \\
 &= \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \rho_0 \left(\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}_s + \vec{v}_s \cdot \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_0 \right] \\
 &= \frac{D(\rho_0 \vec{v}_s)}{Dt}
 \end{aligned} \tag{1.77}$$

d'après les hypothèses (1.41) et la stationnarité de l'écoulement moyen.

De plus,

$$\begin{aligned}
 \text{div} \left[\frac{D\rho_0 \vec{v}_s}{Dt} \right] &= \text{div} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \vec{v}_s) + \left(\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) (\rho_s \vec{v}_0) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} [\text{div} (\rho_0 \vec{v}_s)] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[v_{0j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 v_{si}) \right] \\
 &= \frac{D}{Dt} [\text{div} (\rho_0 \vec{v}_s)] + \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_0 v_{sj})
 \end{aligned} \tag{1.78}$$

D'o  :

$$\begin{aligned}
 &\text{div} \left[\rho_s \left(\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}_0 + \rho_0 \left(\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}_0 \right] + \text{div} \left[\rho_0 \frac{D\vec{v}_s}{Dt} \right] - \frac{D}{Dt} \text{div} [\rho_0 \vec{v}_s] \\
 &= \\
 &\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho_0 v_{si} \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} + \rho_1 v_{0i} \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_0 v_{sj}) \\
 &= \\
 &\frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \left[2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 v_{si}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_1 v_{0i}) \right]
 \end{aligned} \tag{1.79}$$

2. Tracé de rayons

Nous présentons dans ce paragraphe des exemples de réfraction du son en utilisant deux méthodes standards de tracé de rayons acoustiques : la première méthode est uniquement valable en présence de vorticité et à l'ordre \mathcal{M} , la deuxième peut être considérée comme une généralisation pour un écoulement stationnaire quelconque.

2.1 Méthodes proposées

2.1.1 Tracé de rayons à l'ordre \mathcal{M}

Cette approche a pour point de départ l'équation de Landau (1.35)  voqu e au paragraphe 1.5.2 :

$$\frac{d\vec{t}}{dl} = \vec{\Omega}(l) \wedge \vec{t}/c_0 \quad (2.1)$$

où \vec{t} est un vecteur unitaire tangent au rayon acoustique, l est la coordonnée curviligne le long du rayon, $\vec{\Omega}$ la vorticité et c_0 la vitesse du son dans le milieu au repos. Comme nous l'avons déjà dit, cette approche est uniquement valable à l'ordre $\mathcal{M} \ll 1$ et bien sûr dans le cas où l'écoulement possède de la vorticité. Dans le cas contraire, il est nécessaire d'effectuer un traitement direct sur l'amplitude et la phase de l'onde (voir le paragraphe 2.1.2 suivant).

Dans le cas bidimensionnel, cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dt_x}{dl} &= -\Omega(l) t_y/c_0 \\ \frac{dt_y}{dl} &= \Omega(l) t_x/c_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où $\vec{t} = (t_x, t_y)$ et $\vec{\Omega} = \Omega(x, y)\hat{z} = \Omega(l)\hat{z}$.

Le tracé de rayons est effectué à partir de l'équation (2.2)   l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 [PFTV93].   titre d'exemple, nous tracerons les rayons dans le cas d'un tourbillon en rotation solide avec ou sans circulation.

2.1.2 Solution générale dans le cadre de l'eikonale

Rappelons les équations générales (1.38) de la trajectoire d'un rayon acoustique $\vec{r}(\tau)$ déduite au paragraphe 1.5.3 :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{d\tau} &= c(\vec{r}) \frac{\vec{k}}{k} + \vec{u}(\vec{r}) \\ \frac{d\vec{k}}{d\tau} &= -k \overrightarrow{\text{grad}} c - \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{k} \cdot \vec{u})_{\vec{k}} \end{cases} \quad (2.3)$$

Il s'agit d'une extension du traitement précédent afin de prendre en compte, d'une part la vitesse locale du son qui peut-être différente de celle dans un milieu au repos, d'autre part l'ensemble des gradients de vitesse de l'écoulement (composantes symétriques et antisymétriques du tenseur des déformations). Cette méthode est de plus valable sans contrainte sur le nombre de Mach, à condition de rester dans le cadre de l'acoustique géométrique et de la théorie de l'eikonale (voir le paragraphe 1.1).

Le tracé de rayons est ici aussi effectué à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 [PFTV93], pour un écoulement donné correspondant à des champs de vitesse $\vec{u}(\vec{r})$ et de vitesse du son $c(\vec{r})$ connus.

2.1.3 Précisions numériques

Les deux méthodes de tracé de rayons acoustiques utilisent un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 [PFTV93]. Dans le cas général, nous utilisons un maillage cartésien (de maillage typique 128 points pour une taille de 0.1 m) pour évaluer les champs de vitesse de l'écoulement et de vitesse du son. Nous avons choisi un pas d'intégration (dl ou $d\tau$) suffisamment petit de manière à s'assurer une bonne précision (nombre de points suffisant) pour le tracé des rayons acoustiques.

Après plusieurs tests, le meilleur compromis précision-temps de calcul nous a semblé être :

- pour l'équation de Landau (2.2), un pas d'intégration $dl = 10^{-3} m$ assez proche du pas de grille $\Delta x = 7.81 \cdot 10^{-4} m$;
- pour la méthode générale 2.3, un pas d'intégration $d\tau = 10^{-6} s$, cohérent avec le pas d'intégration spatial employé dans l'autre méthode ($c d\tau \simeq 3.8 \cdot 10^{-4} m$).

Chaque figure présentée propose l'évolution de rayons acoustiques pour un écoulement donné. Nous avons également représenté, symbolisés par des cercles, les tailles caractéristiques des écoulements étudiés.

2.1.4 Calcul de l'angle de réfraction θ

Une quantité permettant de caractériser la réfraction [Geo72] est l'angle de réfraction Θ . Il est défini par

$$\Theta = \arctan \left(\frac{\Delta y}{x_0} \right) \quad (2.4)$$

à l'aide des notations de la figure I.2.

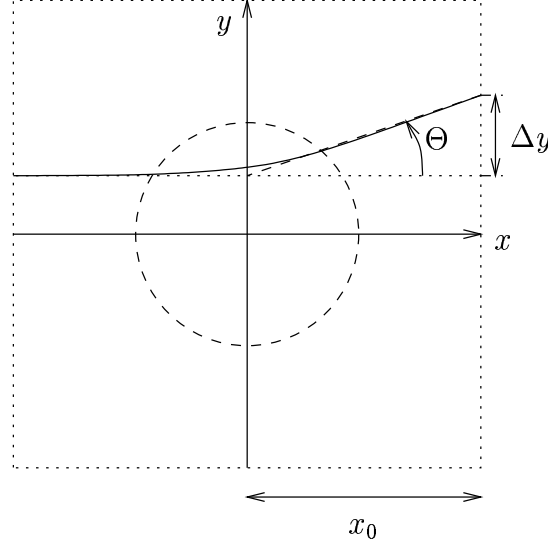


FIG. I.2 – Définition de l'angle de réfraction Θ . ($\cdot \cdot \cdot$) délimite le domaine de calcul des rayons acoustiques et ($---$) représente la zone d'interaction son-écoulement.

L'angle de réfraction offre une comparaison aisée des deux méthodes proposées ainsi qu'une compréhension claire des mécanismes de réfraction, en complément des figures représentant les rayons.

2.2 Tourbillon avec cœur en rotation solide

Il s'agit d'un écoulement en rotation solide, avec un cœur de rayon L . Sa vorticité est décrite par

$$\begin{cases} \Omega(r) &= \Omega_0 & r \leq L \\ \Omega(r) &= 0 & r \geq L \end{cases} \quad (2.5)$$

et sa vitesse \vec{v} , qui ne comporte qu'une composante orthoradiale, par

$$\begin{cases} v_\theta(r) &= \Omega_0 r/2 & r \leq L \\ v_\theta(r) &= \frac{\Gamma}{2\pi r} & r \geq L, \end{cases} \quad (2.6)$$

$\Omega_0 > 0$, de sorte que la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique et nous avons choisi $L = 0.01 m$.

La circulation de l'écoulement s'exprime par $\Gamma = \pi\Omega_0 L^2$ et le nombre de Mach de l'écoulement est $\mathcal{M} = \Omega_0 L/(2c_0)$.

Ce type d'écoulement a déjà été étudié par Salant [Sal69], mais en supposant soit un tourbillon potentiel, i.e. le cas $r \geq L$ dans (2.6), soit en supposant une rotation solide de l'ensemble du système étudié, i.e. le cas $r \leq L$ dans (2.6).

2.2.1 Tracé de rayons à l'ordre \mathcal{M}

Les figures I.3, I.5, I.7 et I.9 présentent la réfraction des rayons par ce tourbillon en rotation solide pour différents nombres de Mach \mathcal{M} . Plus le nombre de Mach est grand, plus la réfraction est importante. Pour $\mathcal{M} \simeq 0.1$, il apparaît une zone de silence (zone qui n'est jamais atteinte par le son) dans la direction avant (figure I.5) qui devient de la taille caractéristique du tourbillon pour des nombres de Mach plus importants (figures I.7 et I.9). On peut également noter la présence de caustiques, même pour de faibles \mathcal{M} (figure I.3).

2.2.2 Utilisation de la méthode générale

Il faut prendre en compte la distribution de pression et de masse volumique du tourbillon, afin d'exprimer la vitesse locale du son. En assimilant le fluide à un gaz parfait et en supposant que les transformations sont adiabatiques et quasi-statiques, la relation

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C^{\text{te}} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad (2.7)$$

peut être considérée comme l'équation d'état du système. Ainsi, la vitesse du son s'exprime selon :

$$c(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\gamma p(\vec{r})}{\rho(\vec{r})}} \quad (2.8)$$

L'équation d'Euler, en coordonnées polaires, prend la forme

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r} \quad (2.9)$$

pour un écoulement à symétrie cylindrique.

Ainsi, en utilisant les deux relations précédentes (2.6) et (2.9), on obtient

$$\begin{cases} p(r) = p_0 \left[1 + \frac{(\gamma - 1) \rho_0 \Omega_0^2}{8\gamma p_0} (r^2 - 2L^2) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} & r \leq L \\ p(r) = p_0 \left[1 - \frac{(\gamma - 1) \rho_0 \Omega_0^2}{8\gamma p_0} \frac{L^4}{r^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} & r \geq L \end{cases} \quad (2.10)$$

On peut alors, à l'aide des relations (2.8) et (2.7) exprimer la vitesse locale du son.

Les figures I.4, I.6, I.8 et I.10 présentent la réfraction des rayons par ce tourbillon en rotation solide pour différents \mathcal{M} . Pour des nombres de Mach faibles ($\mathcal{M} \leq 0.1$), les résultats sont sensiblement analogues à ceux du paragraphe précédent, hormis une légère déviation des rayons à l'extérieur du cœur du tourbillon. Par contre, pour des nombres de Mach plus importants (figures I.8 et I.10), les résultats sont très différents et la zone de silence prédite par la relation de Landau disparaît car l'effet des gradients de vitesse devient important en dehors du tourbillon. Ces résultats, ainsi que la localisation des caustiques, sont cohérents avec les précédents tracés effectués [Geo72, CLM94].

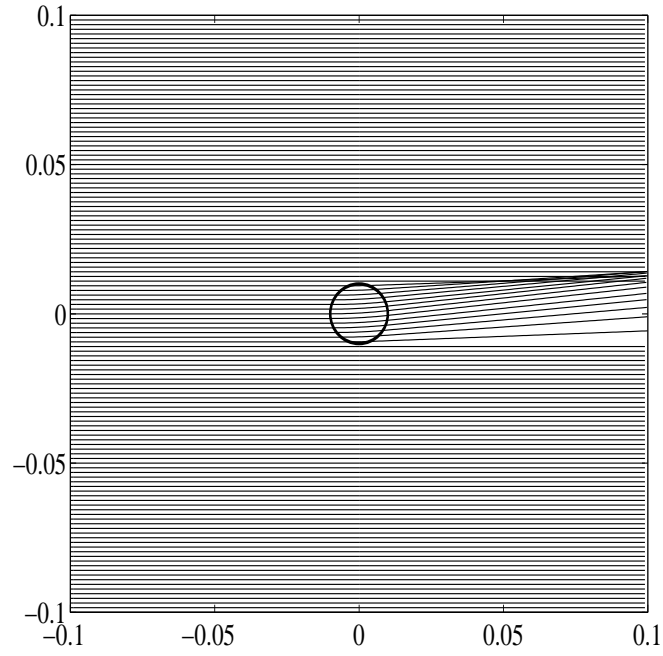


FIG. I.3 – Réfraction par un tourbillon à circulation non nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.052$ (équation de Landau (2.1)). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

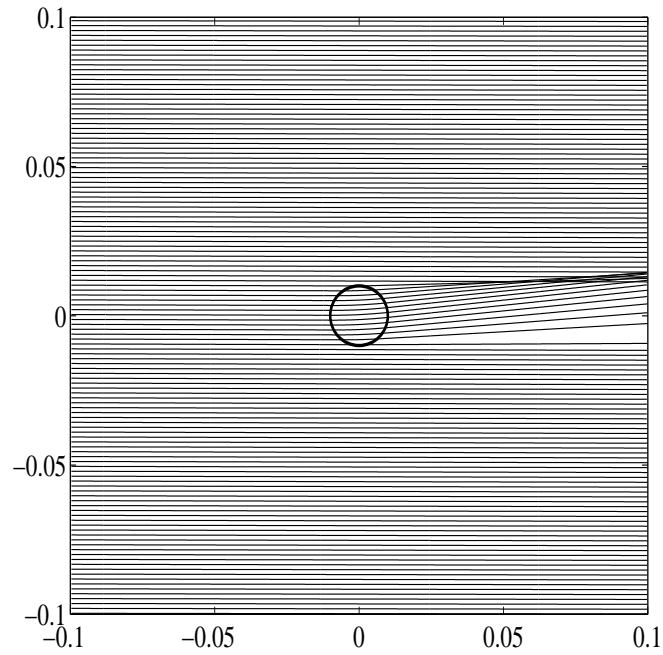


FIG. I.4 – Réfraction par un tourbillon à circulation non nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.052$ (cas général). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

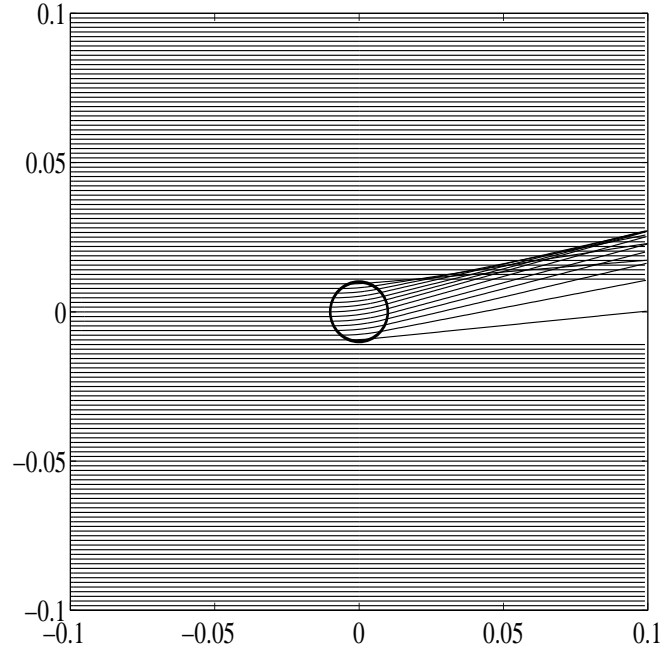


FIG. I.5 – Réfraction par un tourbillon à circulation non nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.13$ (équation de Landau (2.1)). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

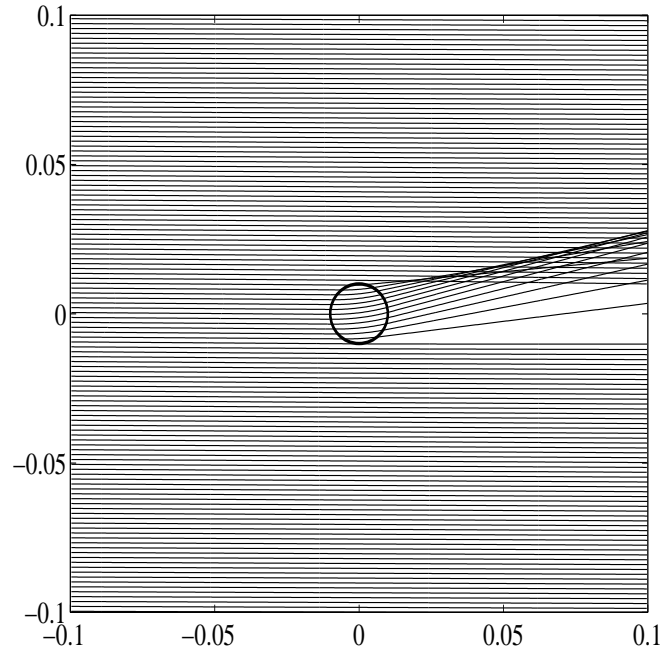


FIG. I.6 – Réfraction par un tourbillon à circulation non nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.13$ (cas général). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

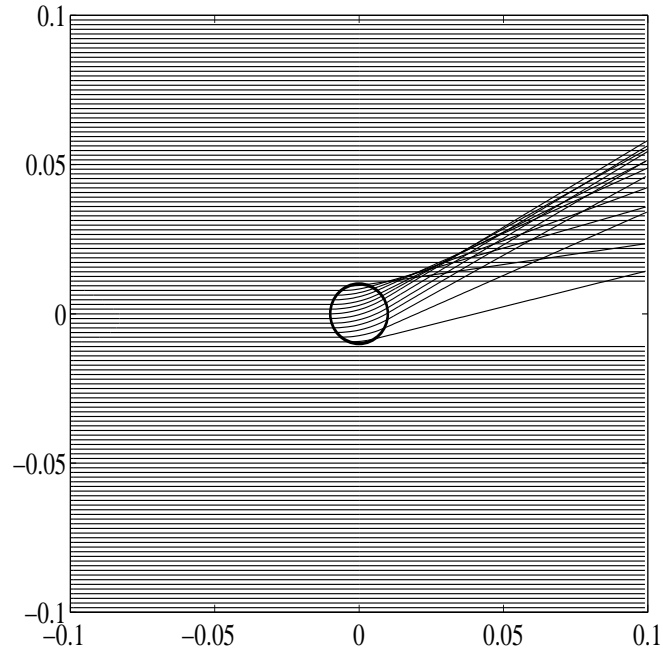


FIG. I.7 – Réfraction par un tourbillon à circulation non nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.26$ (équation de Landau (2.1)). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

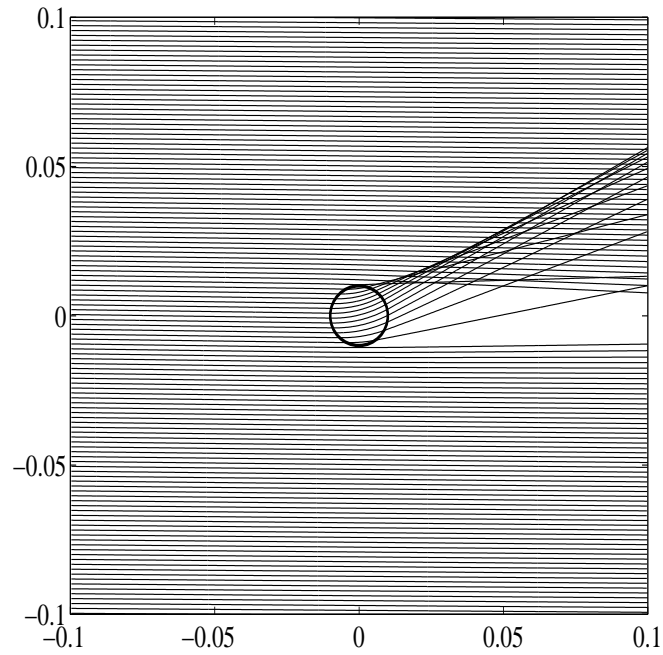


FIG. I.8 – Réfraction par un tourbillon à circulation non nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.26$ (cas général). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

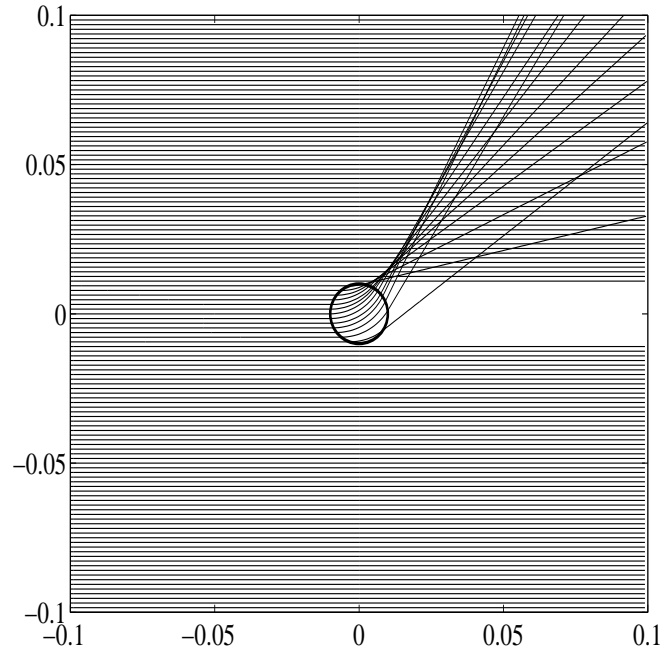


FIG. I.9 – Réfraction par un tourbillon à circulation non nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.52$ (équation de Landau (2.1)). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

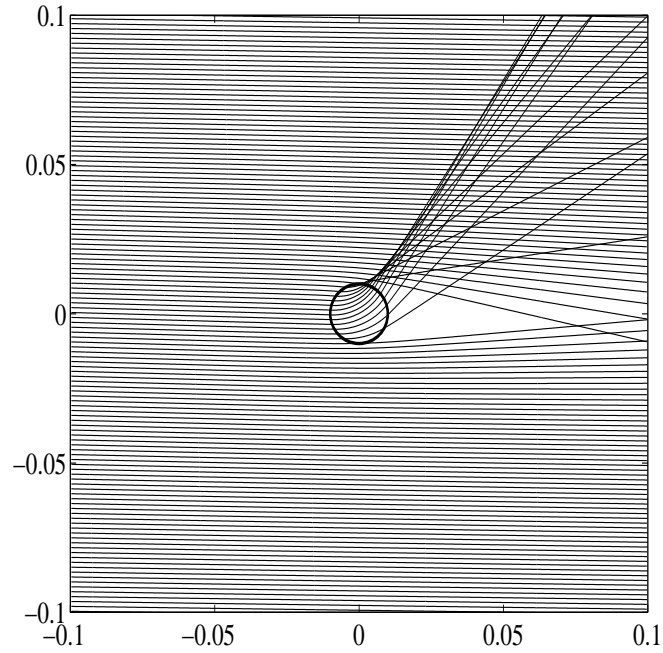


FIG. I.10 – Réfraction par un tourbillon à circulation non nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.52$ (cas général). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

2.2.3 Conclusion

Nous avons modélisé la réfraction d'une onde sonore par un vortex en rotation solide dans le cadre de l'acoustique géométrique.

Les figures I.11 et I.12 mettent en évidence les limites d'une approche à l'ordre \mathcal{M} de la réfraction du son. En effet, même si l'on obtient des résultats qualitatifs corrects pour les rayons réfractés au cœur du tourbillon, cette approche ne prend pas en compte l'effet de l'écoulement extérieur au tourbillon. Cet effet, dû aux composantes irrotationnelles du champ de vitesse de l'écoulement est important, même aux petits nombres de Mach, comme le montre la figure I.13 où on a normalisé, pour chaque \mathcal{M} , l'angle de réfraction Θ par rapport à la déviation maximale. Même pour des distances grandes devant la taille du tourbillon ($L = 0.01$ m), les rayons subissent une réfraction par les gradients de la vitesse de l'écoulement et par les variations locales de la vitesse du son.

2.3 Cas des tourbillons à circulation nulle

2.3.1 Introduction

Généralités

Dans le cas d'un vortex à circulation non nulle, l'écoulement réfracte les rayons acoustiques même en dehors du cœur du tourbillon, à cause de la présence de gradients de vitesse et des variations de la vitesse du son. Il en est tout autrement pour un tourbillon à circulation nulle : dans ce cas, à l'extérieur du vortex (zone où la vorticité est nulle), la vitesse de l'écoulement est nulle et la célérité du son est celle dans le fluide au repos. Ainsi, dans ce cas particulier, les tracés de rayons obtenus par l'équation de Landau (2.1) et par la méthode générale (2.3) ne diff  reront que très légèrement d'un point de vue quantitatif mais les phénomènes physiques observés seront qualitativement analogues.

Réfraction par un vortex de Taylor

   titre d'exemple, nous allons comparer les résultats obtenus par les deux méthodes dans le cas du vortex de Taylor, dont les champs de vorticité, de vitesse et de pression s'expriment :

$$\vec{\Omega}(r) = \Omega_0 \left[2 - (r/L_1)^2 \right] \exp \left[\frac{1 - (r/L_1)^2}{2} \right] \hat{z} \quad (2.11.a)$$

$$\vec{v}(r) = \Omega_0 r \exp \left[\frac{1 - (r/L_1)^2}{2} \right] \hat{\theta} \quad (2.11.b)$$

$$p(r) = p_0 \left[1 - \frac{(\Omega_0 L_1)^2 \rho_0}{2 p_0} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \exp \left[1 - (r/L_1)^2 \right] \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2.11.c)$$

en utilisant l'équation d'état (2.7), avec $\Omega_0 > 0$, ce qui signifie que l'écoulement tourne dans le sens trigonométrique. Le tourbillon peut être modélisé par un cœur de rayon

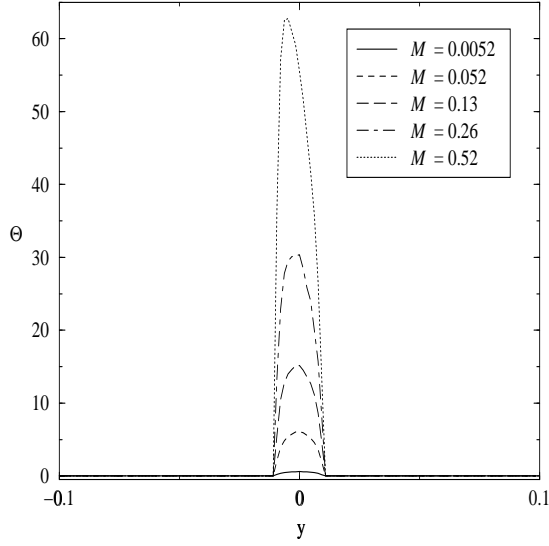


FIG. I.11 – Angle de réfraction Θ (en degrés) en fonction de la position initiale y (en mètres) du rayon pour un tourbillon à circulation non nulle ($L = 0.01\text{ m}$) dans le cas de l'équation de Landau (2.1).

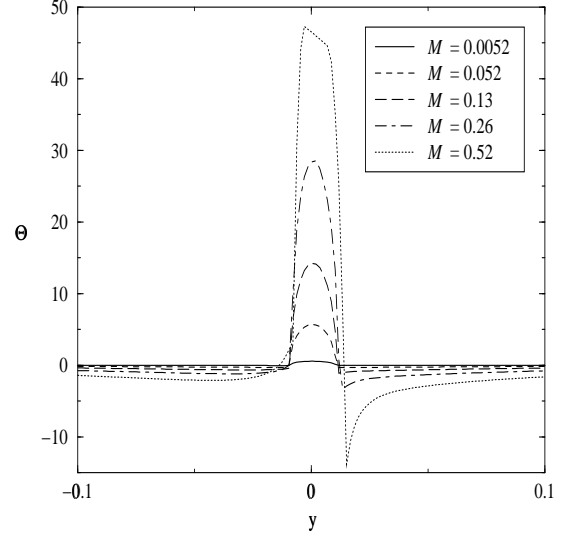


FIG. I.12 – Angle de réfraction Θ (en degrés) en fonction de la position initiale y (en mètres) du rayon pour un tourbillon à circulation non nulle ($L = 0.01\text{ m}$) dans le cas général.

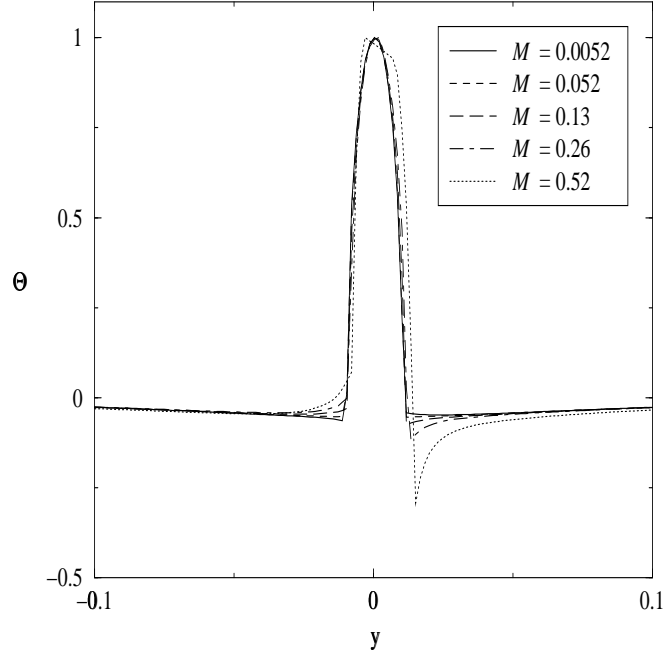


FIG. I.13 – Angle de réfraction normalisé Θ (en degrés) en fonction de la position initiale y (en mètres) du rayon pour un tourbillon à circulation non nulle ($L = 0.01\text{ m}$) dans le cas général.

$\sqrt{2}L_1$ et une couronne extérieure de vorticité négative pour $\sqrt{2}L_1 \leq r \leq 4L_1$ (voir le paragraphe 1.2.1 du chapitre IV).

Les figures I.14 et I.15 montrent la réfraction pour un vortex de Taylor, avec $L = 0.01 m$ et $\mathcal{M} \simeq 0.16$. La figure I.16 confirme bien que la réfraction est sensiblement analogue pour ce type de vortex en résolvant le problème général ou en ne conservant que les termes d'ordre \mathcal{M} .

Conclusion

On peut donc se contenter, pour ce type d'écoulement à circulation nulle, de l'ordre \mathcal{M} pour une étude de la réfraction. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant en étudiant la réfraction par un écoulement en rotation solide et à circulation nulle.

2.3.2 Tourbillon en rotation solide à circulation nulle

L'écoulement du paragraphe 2.2 peut être modifié afin d'obtenir un tourbillon à circulation nulle en ajoutant une couronne de vorticité négative :

$$\begin{cases} \Omega(r) &= \Omega_0 & r \leq L_1 \\ \Omega(r) &= \Omega_1 & L_1 \leq r \leq L_2 \\ \Omega(r) &= 0 & L_2 \leq r, \end{cases} \quad (2.12)$$

sa vitesse \vec{v} s'exprimant alors selon

$$\begin{cases} v_\theta(r) &= \Omega_0 r/2 & r \leq L_1 \\ v_\theta(r) &= \Omega_1 r/2 + \frac{(\Omega_0 - \Omega_1) L_1^2}{2r} & L_1 \leq r \leq L_2 \\ v_\theta(r) &= 0 & L_2 \leq r \end{cases} \quad (2.13)$$

La circulation totale Γ de l'écoulement est nulle, ce qui signifie que :

$$0 = \Gamma = \iint \Omega r dr d\theta = \pi \left[\Omega_0 L_1^2 + \Omega_1 (L_2^2 - L_1^2) \right] \quad (2.14)$$

qui nous fournit une relation en Ω_0 et Ω_1 pour une géométrie donnée (L_1 et L_2 fixées) de l'écoulement :

$$\Omega_1 = \frac{-\Omega_0 L_1^2}{L_2^2 - L_1^2} < 0 \quad (2.15)$$

car la rotation a lieu dans le sens trigonométrique ($\Omega_0 > 0$).

Les figures I.17-I.22 présentent la réfraction des rayons acoustiques pour deux types de rapport L_2/L_1 et pour plusieurs nombres de Mach. La situation est ici beaucoup plus riche que dans le cas d'un tourbillon à circulation non nulle. On se trouve ainsi dans une situation où des caustiques apparaîssent de part et d'autre de l'axe ($x'x$) selon que les rayons ont ou n'ont pas travers  le cœur du tourbillon (figure I.19 par exemple). Par contre, la couronne de vorticité ne permet pas d'annuler la réfraction des rayons passant par le cœur. Elle peut tout au plus la diminuer. Ces résultats sont cohérents avec ceux de

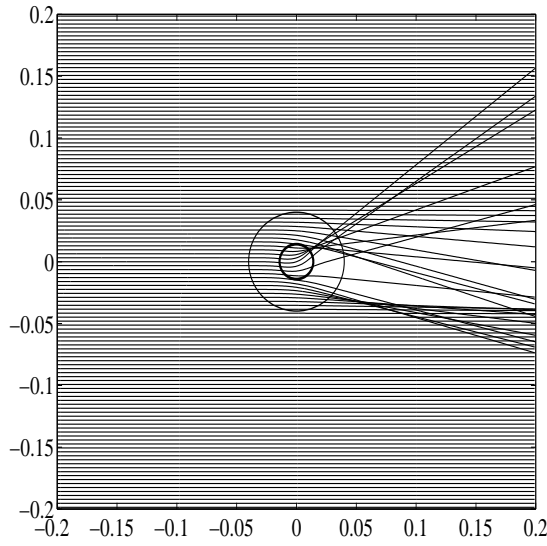


FIG. I.14 – Réfraction par un tourbillon de Taylor pour un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ (équation de Landau (2.1)). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

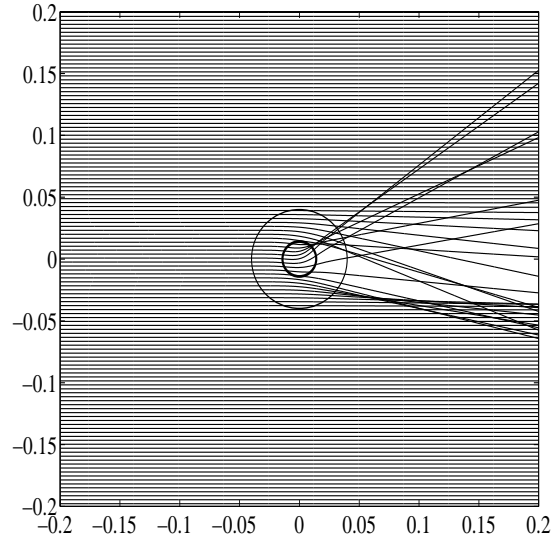


FIG. I.15 – Réfraction par un tourbillon de Taylor pour un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ (cas général). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

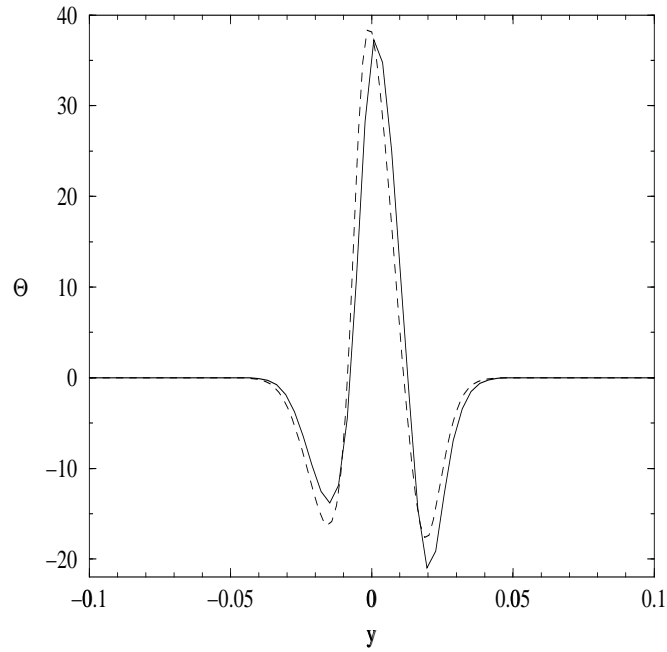


FIG. I.16 – Angle de réfraction Θ (en degrés) en fonction de la position initiale y (en mètres) du rayon pour un tourbillon de Taylor ($\mathcal{M} \simeq 0.16$): (—) cas général, (---) équation de Landau (2.1)).

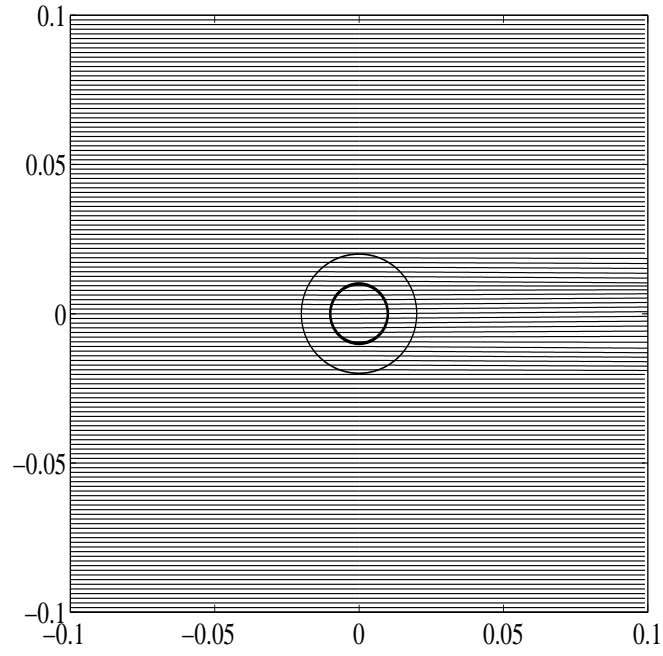


FIG. I.17 – Réfraction par un tourbillon à circulation nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.0052$ et $L_2 = 2L_1$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

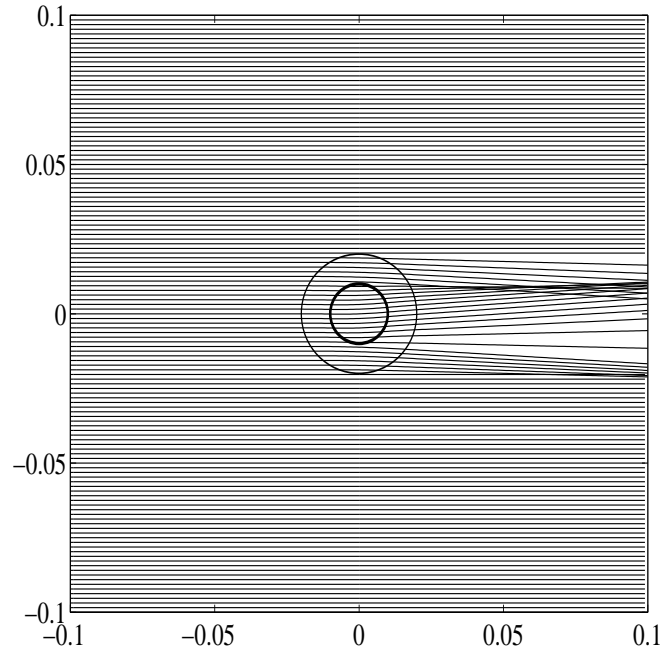


FIG. I.18 – Réfraction par un tourbillon à circulation nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.052$ et $L_2 = 2L_1$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

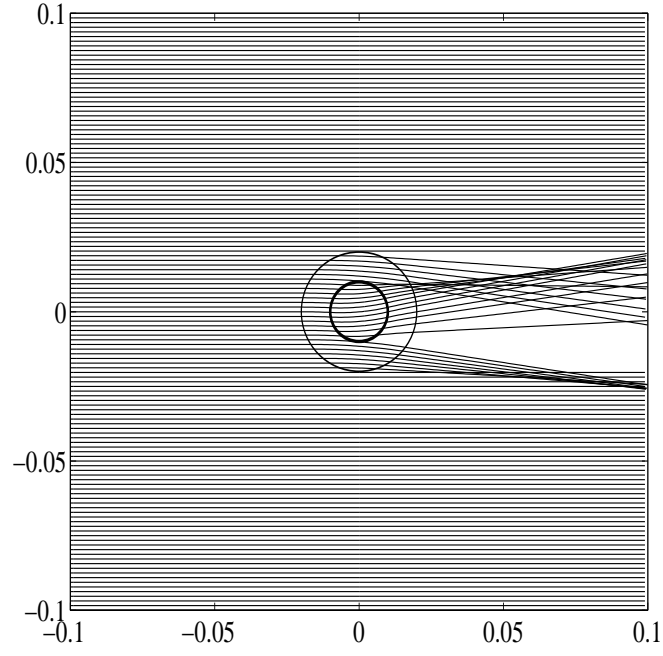


FIG. I.19 – Réfraction par un tourbillon à circulation nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.13$ et $L_2 = 2L_1$.
Les unités sur chaque axe sont en mètres.

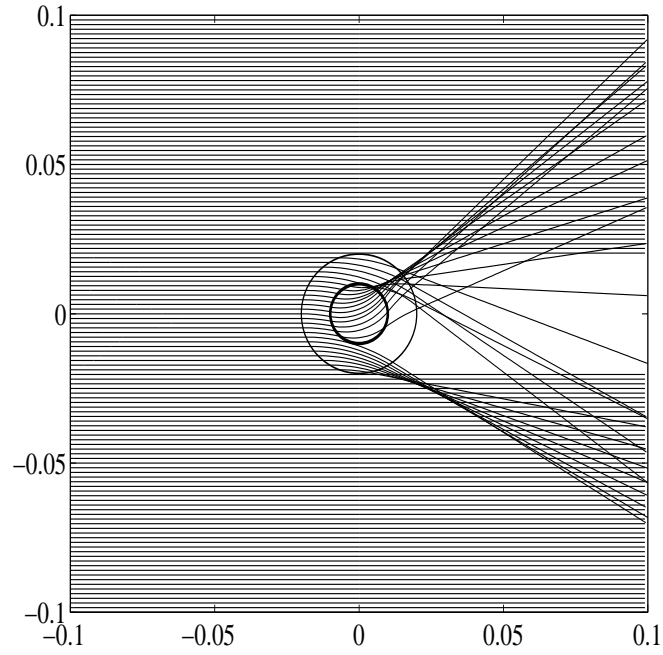


FIG. I.20 – Réfraction par un tourbillon à circulation nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.52$ et $L_2 = 2L_1$.
Les unités sur chaque axe sont en mètres.

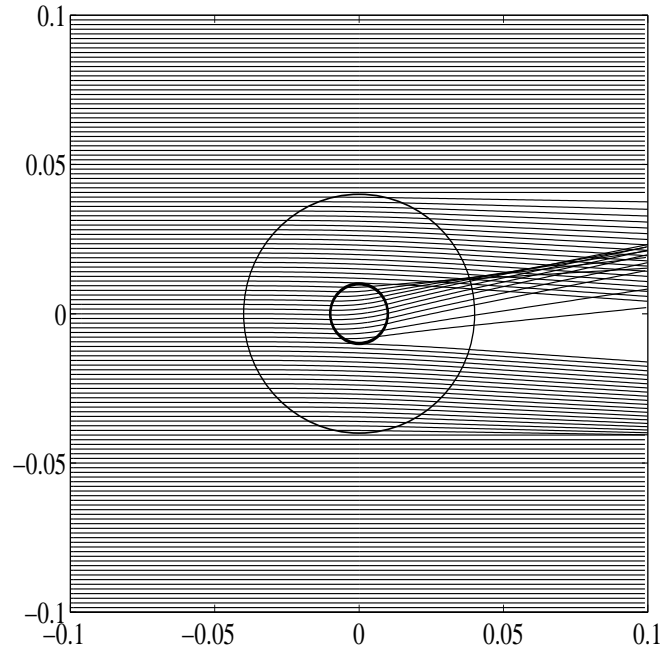


FIG. I.21 – Réfraction par un tourbillon à circulation nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.13$ et $L_2 = 4L_1$.
Les unités sur chaque axe sont en mètres.

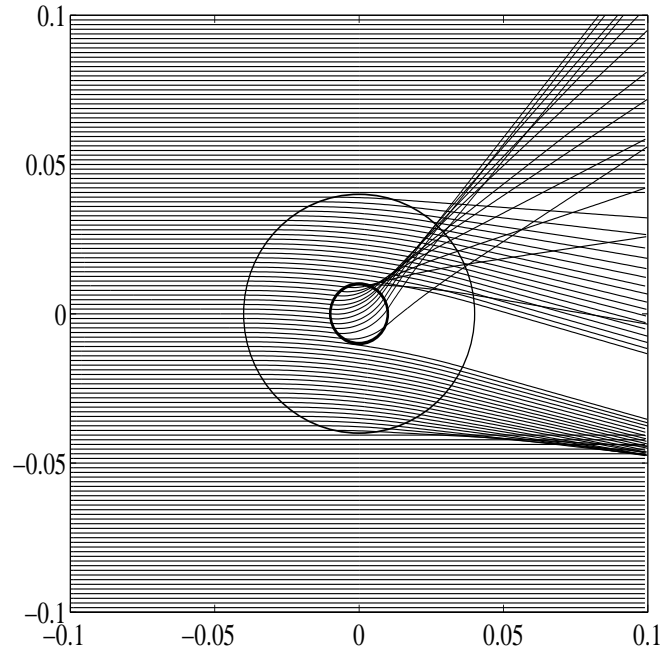


FIG. I.22 – Réfraction par un tourbillon à circulation nulle : $\mathcal{M} \simeq 0.52$ et $L_2 = 4L_1$.
Les unités sur chaque axe sont en mètres.

Mathiesen [Mat87] qui a effectué le tracé de rayons dans le cas de la réfraction d'ondes de surface par un courant tourbillonnaire.

Le cas $L_2 = 4L_1$ présente une différence importante avec le cas $L_2 = 2L_1$. Dans ce cas, la vorticité Ω_1 est plus faible, ce qui conduit à des déviations moins importantes des rayons (figure I.19 et I.21). Selon le nombre de Mach choisi, il peut apparaître une zone de silence, mais qui ne se trouve plus dans la direction d'incidence des rayons à cause de la rotation dans le sens anti-trigonometrique de la couronne.

2.4 Cas limite d'un vortex ponctuel

Ce type de vortex a été abondamment employé comme modèle de tourbillon aussi bien en acoustique géométrique [Lin48] que dans des cas de diffusion du son [O'S75, TI82, Sak93] car il représente de manière satisfaisante ce que voit un observateur loin de l'écoulement.

La limite d'un vortex ponctuel est obtenue à partir de l'écoulement en rotation solide (2.5)-(2.6) dans la limite $\varepsilon = L \rightarrow 0$ en conservant la même valeur de la circulation $\Gamma = \pi\Omega_0 \varepsilon^2$ ou du nombre de Mach $\mathcal{M} = \Omega_0 \varepsilon / (2c_0)$. Dans le cadre de l'acoustique, il nous semble plus judicieux de prendre la limite $\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{M}=C^{te}} 0$ (voir la figure I.23).

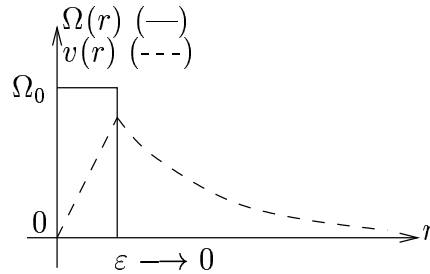


FIG. I.23 – *Filament de Vorticité.*

Remarque : Le choix du tourbillon en rotation solide (2.5)-(2.6) pour atteindre la limite du vortex ponctuel peut laisser à penser que la présence d'une discontinuité des gradients de vitesse en $r = \varepsilon$ (voir figure I.23) va biaiser les résultats de réfraction du son.

Une manière plus « réaliste » d'atteindre la limite du vortex ponctuel est de prendre la limite $L \rightarrow 0$ dans le cas du vortex d'Oseen (voir le paragraphe 2.2) du chapitre V). Cependant, en examinant la structure du champ de vitesse de ce tourbillon, on constate que lorsque sa taille caractéristique $L \rightarrow 0$, il s'identifie à un vortex potentiel du type « rotation solide », de structure analogue à celle présentée à la figure I.23. Nous avons vérifié que les résultats présentés sont bien analogues dans le cas d'un vortex d'Oseen de taille caractéristique $L \rightarrow 0$.

Dans ce cas limite, l'équation (2.1) prédit que seul le rayon passant par le cœur du vortex sera dévié, tout autre rayon n'étant pas dévié par l'écoulement. Il est effectivement raisonnable de penser que seuls les rayons passant très près du cœur du vortex seront

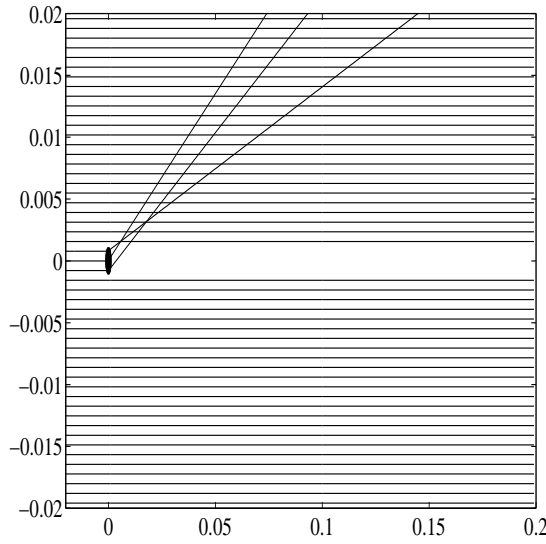


FIG. I.24 – Réfraction par un vortex ponctuel (indiqué par \bullet): $\mathcal{M} \simeq 0.13$ (équation de Landau (2.1)). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

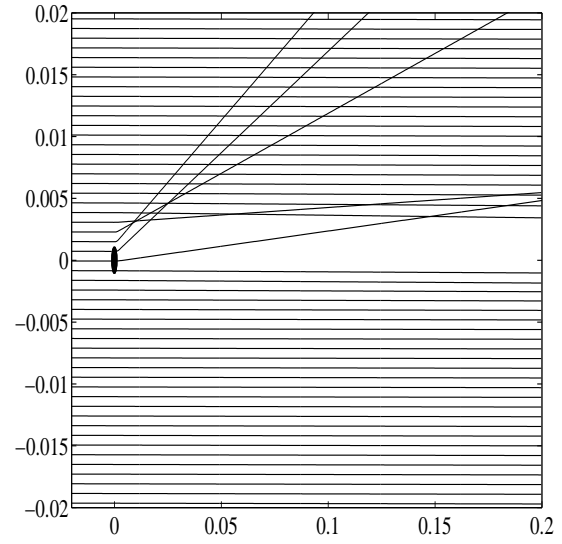


FIG. I.25 – Réfraction par un vortex ponctuel (indiqué par \bullet): $\mathcal{M} \simeq 0.13$ (cas général). Les unités sur chaque axe sont en mètres.

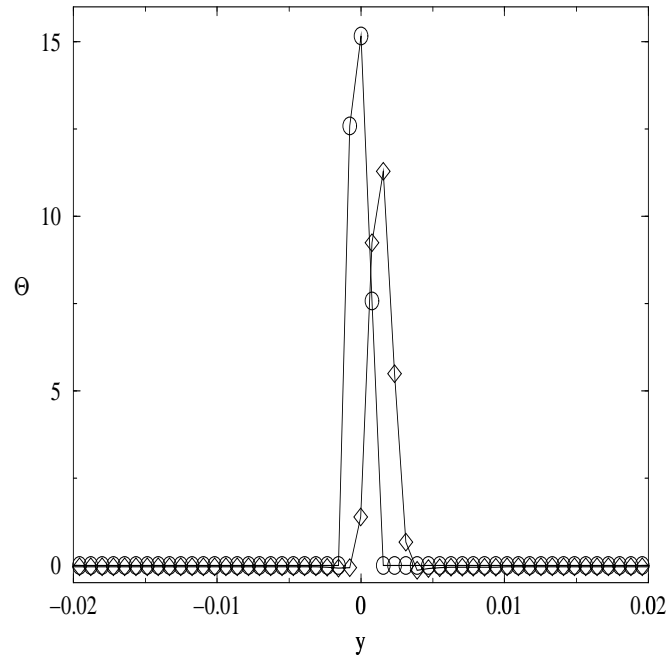


FIG. I.26 – Angle de réfraction Θ (en degrés) en fonction de la position initiale y (en mètres) du rayon pour un vortex ponctuel ($\mathcal{M} \simeq 0.13$): (\diamond) cas général, (\circ) équation de Landau (2.1)).

réfractés par l'écoulement. En effet, si l'on se place très loin de filaments, seuls les rayons atteignant l'observateur sous incidence faible seront donc déviés. Cependant, dans ce cas, la vorticité est nulle presque partout et l'écoulement peut donc être considéré comme potentiel « presque partout ». Un traitement à l'ordre \mathcal{M} n'est alors pas suffisant.

Les figures I.24 et I.25 montre la réfraction par un vortex ponctuel (dans la limite de l'acoustique géométrique $\lambda \ll \varepsilon$) en résolvant l'équation de Landau ou le cas général. Nous avons choisi un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.13$ afin d'obtenir une déviation Θ suffisamment importante, et $\varepsilon = 0.001 m$. Contrairement à ce que prédit l'approximation d'ordre \mathcal{M} , la déviation maximale a lieu pour $r \simeq \varepsilon$ car c'est dans cette zone que les gradients de vitesse sont les plus importants. De plus, on peut constater que les rayons sont déviés à l'extérieur du tourbillon, comme le montre la figure I.26. Par contre, l'ordre de grandeur de la déviation maximale est cohérent dans les deux méthodes, puisqu'il est relié au nombre de Mach qui caractérise les gradients de vitesse les plus intenses.

2.5 Conclusion

Nous avons modélisé la réfraction d'une onde sonore par un vortex dans le cadre de l'acoustique géométrique. En présence de vorticité, la relation de Landau modélise assez bien la réfraction des rayons acoustiques, au moins du point de vue qualitatif pour de faibles nombres de Mach.

Cependant, cette équation ne fait intervenir que la vorticité de l'écoulement : il n'y aurait pas de réfraction dans le cas d'un écoulement irrotationnel ou dans le cas d'un vortex ponctuel. Pour ce type d'écoulement, cette approximation à l'ordre \mathcal{M} en supposant l'existence d'un tourbillon, n'est plus valable.

De plus, cette relation n'est valable que pour $\mathcal{M} \ll 1$, et avec $\mathcal{M} \simeq 0.1$, elle s'avère déjà inexacte. Il faut alors prendre en compte les termes correctifs en \mathcal{M}^2 que nous avons déjà évoqué au paragraphe 1.5.3.

Les relations déduites du paragraphe 1.5.3 et que nous avons utilisé au paragraphe 2.1.2 ne souffrent pas de toutes ces restrictions. Elles sont valables pour tout type d'écoulement, dans la limite géométrique $\lambda \ll L$ et dans le cadre de la théorie de l'eikonale (voir le paragraphe 1.1). De plus, bien que le nombre de Mach n'intervienne pas explicitement, ces relations se trouvent inadéquates dans le cas de fortes variations des gradients de vitesse, et donc de la vitesse du son c [Jon63], car l'approximation de l'eikonale (variation spatiale rapide de l'amplitude sonore) n'est plus valable.

La trajectoire des rayons acoustiques peut être une indication précieuse pour l'étude de l'interaction son-écoulement, même en présence de caustiques, car celles-ci n'affectent que l'amplitude de l'onde acoustiques mais pas sa trajectoire [Bro77]. Ainsi, lorsque nous aurons à effectuer du tracé de rayons, nous utiliserons, comme cela est souvent le cas [CLM94, ESC00], les expressions générales du paragraphe 2.1.2, même pour des tourbillons à circulation nulle analogues à ceux étudiés au paragraphe 2.3.

3. Résolution approchée de l'équation de diffusion

3.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà vu en acoustique géométrique, l'interaction son-écoulement présente de fortes analogies avec la propagation d'une onde lumineuse dans un milieu biréfringent. Ainsi, on peut considérer que le point de départ de la diffusion du son par un écoulement spatialement localisé est le principe d'Huygens-Fresnel, le problème résidant alors dans la nature de l'excitation des sources secondaires entourant l'écoulement.

Nous nous placerons dans ce chapitre dans la limite où une équation d'ondes avec un terme source peut être explicité pour modéliser l'interaction son-écoulement. Il s'agit de la limite des grandes longueurs d'ondes, au sens $\lambda \gg L$ ou $\lambda \simeq L$. Dans cette limite, un certain nombre de résultats permettent de mieux comprendre le mécanisme de diffusion du son par un écoulement, en négligeant tous les phénomènes de diffusions multiples.

Après avoir défini les différentes quantités nécessaires pour une modélisation ondulatoire de la diffusion du son, nous nous intéressons d'abord à l'ordre de grandeur des différents termes sources. Ceci nous permet d'étudier de manière simple le cas $\lambda \gg L$, pour lequel nous pouvons expliciter une forme générale de l'amplitude de diffusion. Nous nous attardons ensuite sur la première approximation de Born, qui permet d'explicitier une relation analytique simple entre l'amplitude de diffusion et la composante perpendiculaire au plan de diffusion de la transformée de Fourier de la vorticité. Nous examinons alors le domaine de validité de la première approximation de Born. Un paragraphe est alors consacré à la diffusion par un écoulement potentiel : nous avons explicité dans ce cas la forme de l'amplitude de diffusion dans la limite de la première approximation de Born. Enfin, nous analysons en terme d'ordre de grandeur la forme générale de l'amplitude de diffusion du son par un écoulement.

Nous nous limiterons à des écoulements bidimensionnels. Les ondes sonores se propageant dans le domaine seront donc des ondes planes ou des ondes cylindriques.

3.2 Amplitude de diffusion

Il est toujours possible de décomposer formellement l'onde sonore au point d'observation M (avec les notations de la figure 2.1) sous la forme :

$$\rho_s = \rho_{inc} + \rho_{diff}, \quad (3.1)$$

la composante ρ_{diff} représentant ainsi l'écart de l'onde sonore par rapport à l'onde incidente. Dans la limite du champ lointain

$$R \gg \frac{2\pi L^2}{\lambda}, \quad (3.2)$$

on peut exprimer l'onde diffusée sous la forme d'une onde localement cylindrique résultant des interférences entre les ondes sonores diffusées par les différentes zones de l'écoulement (voir l'annexe 3.A). On définit ainsi l'amplitude de diffusion $f(\theta)$ par :

$$\rho_{diff} = |\rho_{inc}| f(\theta) \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}} \quad \text{pour } R \gg \frac{2\pi L^2}{\lambda} \quad (3.3)$$

pour une onde monochromatique de pulsation $\nu = ck$, l'angle θ étant appelé angle de diffusion. L'amplitude de diffusion est a priori complexe afin de prendre en compte le déphasage entre l'onde sonore incidente et l'onde diffusée. À deux dimensions, l'amplitude de diffusion est homogène à \sqrt{L} .

3.3 Sections efficaces

L'amplitude de diffusion est liée à la section efficace différentielle de diffusion $d\sigma_{diff}/d\Omega$ par la relation ([Ish78], Volume 1)

$$\frac{d\sigma_{diff}}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (3.4)$$

où $d\Omega$ est l'angle solide élémentaire. Cette section efficace différentielle représente la puissance diffusée dans la direction θ par unité de flux incident et par unité d'angle solide.

À deux dimensions, la section efficace totale de diffusion s'exprime alors par

$$\sigma_{diff} = \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \quad (3.5)$$

et a donc la dimension d'une longueur.

On définit de manière analogue la section efficace différentielle d'absorption et la section efficace totale d'absorption σ_{abs} , qui sont liées à la présence de processus dissipatifs dans le volume de diffusion. Ainsi, on caractérise l'énergie totale prise à l'onde incidente après son passage dans le milieu diffusant (par diffusion directe et/ou par absorption) par la section efficace totale σ_{tot} :

$$\sigma_{tot} = \sigma_{diff} + \sigma_{abs}. \quad (3.6)$$

La conservation de l'énergie de l'onde incidente après son passage dans le milieu diffusant, permet de relier, via le théorème optique, σ_{tot} à l'amplitude de diffusion dans la direction avant $\theta = 0$. Celui-ci s'exprime, à deux dimensions, sous la forme (voir l'annexe 3.B) :

$$\sigma_{tot} = \sqrt{\frac{8\pi}{k}} \Im \left[f(\theta = 0) e^{-i\pi/4} \right]. \quad (3.7)$$

Le théorème optique permet de conclure que l'amplitude de diffusion doit comporter une partie imaginaire non nulle dans la direction incidente, ce qui implique qu'il doit exister une onde diffusée vers l'avant ($|f(\theta = 0)| \neq 0$). On ne peut par contre rien conclure sur le déphasage entre l'onde incidente et l'onde diffusée. De plus, dans le cas d'un milieu sans absorption ($\sigma_{abs} = 0$), le théorème optique permet d'accéder directement à la section efficace totale de diffusion σ_{diff} à partir de la seule expression de $f(\theta = 0)$ [BL99].

Remarque : À trois dimensions, en reprenant la démonstration de l'annexe 3.B, le théorème optique s'exprime

$$\sigma_{tot}^{3D} = \sqrt{\frac{4\pi}{k}} \Im [f(\theta = 0)]. \quad (3.8)$$

Dans ce cas, on peut conclure que l'onde sonore diffusée doit nécessairement être déphasée par rapport à l'onde sonore incidente. En posant $f(\theta) = |f(\theta)| e^{i\varphi}$, le théorème optique impose $\sin \varphi > 0$.

Comme nous venons de le voir, l'amplitude de diffusion f est l'une des quantités fondamentales pour une bonne compréhension des phénomènes de diffusion en champ lointain. Il est donc important de chercher à calculer, analytiquement ou numériquement, la forme de l'amplitude de diffusion en fonction de l'angle de diffusion θ . Cela nécessite d'étudier de manière détaillée le processus de diffusion du son par un écoulement.

3.4 Ordres de grandeur des termes d'interaction

Le point de départ de l'étude de l'interaction son-écoulement est de considérer l'interaction entre une onde sonore (ρ_s, \vec{v}_s) et un écoulement moyen (ρ_0, \vec{v}_0) de nombre de Mach $M \ll 1$. L'onde sonore peut-être traitée comme une perturbation par rapport à l'écoulement moyen. De plus, on se contente d'une modélisation de la diffusion à l'ordre \mathcal{M} , ce qui signifie que l'on peut traiter l'écoulement moyen comme incompressible (voir l'annexe 3.C) : $\rho_0 = C^{te} \Rightarrow \text{div } \vec{v}_0 = 0$.

Les équations de la dynamique des fluides s'expriment alors par un traitement analogue à ce que nous avons fait pour obtenir une équation d'ondes en acoustique géométrique (paragraphe 1.6). Nous n'avons cependant pas fait ici d'hypothèse concernant la stationnarité de l'écoulement moyen. Les quantités sonores satisfont aux relations (1.45) que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{u}_s) = -\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_s \quad (3.9.a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} \rho_s = \frac{\rho_s}{\rho_0^2} \overrightarrow{\text{grad}} p_0 - [(\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_s] \quad (3.9.b)$$

à l'ordre \mathcal{M} , en utilisant la relation $p_s = c^2 \rho_s$. La combinaison des termes de gauche des équations (3.9) permet d'obtenir une équation d'ondes pour le son avec un terme source (les termes des membres de gauche de chaque équation sont du même ordre de grandeur dans le cas de la propagation sonore). Il est déjà intéressant, à ce stade, d'évaluer l'ordre de grandeur des différents termes qui contribueront au terme source de l'équation d'ondes dans chacune des deux équations (3.9). Ainsi, en posant

$$C_0 = \frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \quad C_1 = \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_s \quad (3.10)$$

et

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t}, & E_1 &= \frac{\rho_s}{\rho_0^2} \overrightarrow{\text{grad}} p_0 \\ E_2 &= (\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_0, & E_3 &= (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_s, \end{aligned} \quad (3.11)$$

on arrive à :

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{C_0} &\simeq \mathcal{M}, & \frac{E_1}{E_0} &\simeq \mathcal{M}^2 \frac{\lambda}{L}, \\ \frac{E_2}{E_0} &\simeq \mathcal{M} \frac{\lambda}{L}, & \frac{E_3}{E_0} &\simeq \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

puisque d'après (3.9.a),

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} \simeq \frac{v_s}{c}. \quad (3.13)$$

Ainsi, on pourra toujours négliger le terme E_1 devant E_2 à l'ordre \mathcal{M} et les relations (3.9) se mettent sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{v}_s) &= -\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_s \\ \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} \rho_s &= -[(\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_s]. \end{cases} \quad (3.14)$$

Remarque : les ordres de grandeur précédents ne permettent pas de conclure sur l'ordre de grandeur en λ/L des termes sources de l'équation d'ondes pour le son, qui sont des dérivées spatiales ou temporelles des termes sources de (3.14). Ainsi, la seule comparaison licite est celle des termes E_1 et E_2 , qui sont dans la même puissance de λ/L et qui sont affectés de la même manière lors de l'établissement de l'équation d'ondes, la puissance en \mathcal{M} n'étant pas modifiée.

3.5 Limite de la diffusion de Rayleigh

À l'aide d'ordres de grandeur, on peut étudier simplement la limite des grandes longueurs d'ondes. Dans cette limite, on néglige toutes les dérivées spatiales et temporelles d'ordre 2 en quantités sonores par rapport aux dérivées d'ordre 1.

L'établissement de l'équation d'ondes nécessite une dérivation du jeu d'équations (3.14) :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_s) = -\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_s \quad (3.15.a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho_0} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_s = -[(\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_s]. \quad (3.15.b)$$

Comme nous allons le voir, il est important de conserver complètement le terme source de (3.15.b) qui fait intervenir \vec{v}_0 et \vec{v}_s .

La soustraction entre la dérivée temporelle de (3.15.a) et la divergence de $\rho_0 \times$ (3.15.b) conduit à l'équation d'ondes

$$\frac{\partial^2 \rho_s}{\partial t^2} - \operatorname{div}(c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_s) = -\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}[(\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_s]. \quad (3.16)$$

puisque l'écoulement moyen est supposé stationnaire. Or,

$$\operatorname{div}(c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_s) = c^2 \Delta \rho_s - 2(c \overrightarrow{\operatorname{grad}} c) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_s \simeq c^2 \Delta \rho_s \quad (3.17)$$

à l'ordre \mathcal{M} car on peut considérer la vitesse du son comme constante. En effet, l'analyse effectuée dans l'annexe 1.A reste valable si l'écoulement n'est plus stationnaire. Ainsi, la relation (1.75)

$$2c \overrightarrow{\operatorname{grad}} c = (1 - \gamma) (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{u}. \quad (3.18)$$

conduit à :

$$\frac{2c (\overrightarrow{\operatorname{grad}} c) \cdot (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_s)}{c^2 \Delta \rho_s} \simeq \frac{U^2 \lambda^2}{L c^2 \lambda} = \mathcal{M}^2 \frac{\lambda}{L} \quad (3.19)$$

qui est du même ordre de grandeur en \mathcal{M} que le terme E_1/E_0 que nous avons négligé devant E_2/E_0 au paragraphe 3.4.

Remarque : cette approximation est cohérente avec l'approximation usuelle de la vitesse du son en acoustique linéaire

$$c \simeq c_0 \left[1 + \left(\frac{\partial c}{\partial \rho} \right) \rho_s \right]. \quad (3.20)$$

L'équation d'ondes (3.16) s'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_s}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho_s &\simeq \rho_0 \operatorname{div}[(\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}_s] \\ &= \rho_0 \left[\frac{\partial v_{s_j}}{\partial x_i} \frac{\partial v_{0_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0_i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{s_j}}{\partial x_i} \right] \\ &= 2 \rho_0 \frac{\partial v_{s_j}}{\partial x_i} \frac{\partial v_{0_i}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.21)$$

puisque $\partial v_{0_i} / \partial x_i = \operatorname{div} \vec{v}_0 = 0$ et que l'on se place dans la limite $\lambda \gg L$.

Si le milieu diffusant est localisé, l'onde incidente se propage dans un milieu homogène à l'extérieur de ce milieu et satisfait donc

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right] \rho_{inc} = 0 \quad (3.22)$$

ce qui permet alors d'obtenir une équation d'ondes pour l'onde diffusée $\rho_{diff} = \rho_s - \rho_{inc}$:

$$\frac{\partial^2 \rho_{diff}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho_{diff} = 2 \rho_0 \underbrace{\frac{\partial v_{s_j}}{\partial x_i} \frac{\partial v_{0_i}}{\partial x_j}}_{S(\vec{r}, t, \vec{v}_s)}. \quad (3.23)$$

Le terme source S est proportionnel à $1/\lambda$, ce qui signifie que plus la longueur d'onde du son augmente, moins la diffusion du son est importante (en conservant une équation d'ondes dans la limite des grandes longueurs d'ondes).

Remarque : l'analyse du terme « source » de l'équation (3.15.b) conduirait à un résultat contraire en termes d'efficacité de la diffusion, en utilisant l'hypothèse $\lambda \gg L$ qui conduit à $\|(\vec{v}_0, \vec{\text{grad}}) \vec{v}_s\| \ll \|(\vec{v}_s, \vec{\text{grad}}) \vec{v}_0\|$. Cependant, le terme source dans la relation (3.15.b) n'est pas celui de l'équation d'ondes finale et on ne peut conclure sur l'efficacité de la diffusion qu'après avoir obtenu une équation d'ondes pour les quantités diffusées.

La solution de l'équation (3.23) s'écrit formellement à l'aide de la fonction de Green G du problème (voir l'annexe 3.D) sous la forme

$$\rho_{diff}(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \frac{S(\vec{r}', t', \vec{v}_s')}{c^2} \quad (3.24)$$

où la notation \vec{v}_s' signifie que le champ \vec{v}_s est évalué au point \vec{r}' à l'instant t' . En champ lointain ($\vec{r} \gg \vec{r}'$), cette expression se simplifie selon

$$\rho_{diff}(\vec{r}, t) = A \int d\vec{r}' dt' d\nu \left(\frac{k}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)^{(d-1)/2} \frac{e^{i[k\|\vec{r} - \vec{r}'\| - \nu(t-t')]} S(\vec{r}', t', \vec{v}_s')}{k c^2} \quad (3.25)$$

où A est une constante numérique, d est la dimension de l'espace (voir la relation (3.105) de l'annexe 3.D) et $k = \nu/c$.

Ainsi, d'après (3.25), le champ diffusé est proportionnel à $(1/c^2) (L^d/k) (k/R)^{(d-1)/2}$ à une distance R donnée. Nous pouvons préciser la forme de ρ_{diff} à partir de l'analyse dimensionnelle de l'équation d'ondes (3.23), sans spécifications particulières sur le champ de vitesse \vec{v}_0 :

$$\rho_{diff} = A \rho_0 \frac{v_s}{\lambda} \frac{v_0}{L} \times \frac{L^d}{k c^2} \left(\frac{k}{R} \right)^{(d-1)/2} = A \rho_0 \mathcal{M} \frac{v_s}{c} \frac{L^{d-1}}{(\lambda R)^{(d-1)/2}}. \quad (3.26)$$

Or, $v_s \propto v_{inc}$ et la constante de proportionnalité de la relation (3.26) ne peut dépendre que de λ , qui est la seule longueur caractéristique intervenant explicitement dans la propagation d'une onde lorsque la variation avec R a déjà été prise en compte. Ainsi, à un

facteur numérique A près,

$$\rho_{diff} = A \underbrace{\rho_0 \frac{v_{inc}}{c}}_{\rho_{inc}} \mathcal{M} \frac{L^{d-1}}{(\sqrt{\lambda R})^{(d-1)}}. \quad (3.27)$$

L'amplitude de diffusion $f = R^{(d-1)/2} \|\rho_{diff}\| / \|\rho_{inc}\|$ s'exprime alors selon

$$f = A \mathcal{M} \frac{L^{d-1}}{\lambda^{(d-1)/2}} = A \mathcal{M} L^{(d-1)/2} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^{(d-1)/2} \quad (3.28)$$

et la section efficace de diffusion, directement reliée à la puissance diffusée (voir le paragraphe 3.3), prend la forme :

$$\sigma_{diff} \propto \mathcal{M}^2 L^{(d-1)} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^{(d-1)}. \quad (3.29)$$

À trois dimensions, on retrouve le résultat classique de la diffusion de Rayleigh par un monopôle ([MI86], paragraphe 7.1) :

$$\sigma_{diff} \propto \mathcal{M}^2 L^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2. \quad (3.30)$$

Des hypothèses supplémentaires sur la nature de l'écoulement \vec{v}_0 telles que les symétries des gradients conduiraient à une dépendance différente de la section efficace avec la longueur d'onde :

$$\sigma_{diff} \propto \mathcal{M}^2 L^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^4 \quad (3.31)$$

pour un dipôle et

$$\sigma_{diff} \propto \mathcal{M}^2 L^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^6 \quad (3.32)$$

pour un quadrupole, de manière analogue aux résultats que l'on obtient lors de l'étude de la diffusion d'une onde électromagnétique [Jac75].

3.6 Cas général

Dans le cas général, et en particulier si $\lambda \simeq L$ (avec les notations de la figure 2.1), il faut conserver tous les termes sources dans les relations (3.14). Ainsi, en combinant ces deux relations pour obtenir une équation d'ondes, on obtient, à l'ordre \mathcal{M} [Fab83, Lun89] :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right] \rho_s = 2 \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (v_{0_i} v_{s_j}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_s \frac{\partial v_{0_i}}{\partial t} \right). \quad (3.33)$$

Le premier terme correspond à la diffusion du son par les gradients de vitesse de l'écoulement moyen, tandis que le deuxième terme correspond à la diffusion du son par

les fluctuations temporelles de l'écoulement ($\partial v_{0_i}/\partial x_i = 0$). Il est toujours possible de se placer à des fréquences sonores plus élevées que la fréquence caractéristique $1/T_U$ de l'écoulement. Pour une fréquence $\nu/2\pi$ de l'onde incidente telle que $\nu \gg 1/T_U$, on peut donc considérer que l'écoulement moyen est « gelé » lors du passage de l'onde sonore. Cela revient en pratique à choisir une fréquence élevée pour l'onde incidente et à calibrer les récepteurs sonores afin de ne pas être sensible au son émis par le tourbillon.

L'équation d'ondes se met alors sous la forme

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right] \rho_s = 2 \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (v_{0_i} v_{s_j}). \quad (3.34)$$

Si le milieu diffusant est localisé, l'onde incidente se propage dans un milieu homogène à l'extérieur de ce milieu et satisfait donc à l'équation d'ondes (3.22) ce qui permet alors d'obtenir une équation d'ondes pour l'onde diffusée $\rho_{diff} = \rho_s - \rho_{inc}$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right] \rho_{diff} = 2 \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (v_{0_i} v_{s_j}). \quad (3.35)$$

Le terme source de cette équation d'ondes a bien la même forme que le tenseur de Lightill (1.7), comme nous l'avons déjà signalé précédemment, et est d'ordre \mathcal{M} , contrairement au terme source de génération du son par l'écoulement moyen qui est d'ordre \mathcal{M}^2 .

Dans la limite des très grandes longueurs d'ondes, on retrouve, à partir de l'équation d'ondes (3.35) le résultat de la diffusion de Rayleigh à l'ordre \mathcal{M} que nous avons évoqué au paragraphe précédent.

Le terme source de l'équation d'ondes (3.35) permet une détection aisée des structures cohérentes en mouvement grâce à l'effet Doppler : en posant ν la fréquence de l'onde sonore et $\nu_0 = 1/T_U$ la fréquence propre de l'écoulement, la structure du terme source (produit $v_{0_i} v_{s_j}$) conduit à une émission sonore à la fréquence $\nu \pm \nu_0$, selon la configuration expérimentale. Ainsi, l'onde sonore diffusée est détectable même en présence de l'onde sonore incidente. Cette propriété a été largement exploitée dans les expériences de diffusion du son par les écoulements turbulents [BCP91, Pin92, LP98, HP99, DPF98].

La résolution de l'équation d'ondes (3.35) est formellement possible à partir des fonctions de Green (voir la relation (3.24)) mais elle fait intervenir la vitesse \vec{v}_s du champ sonore total. Ainsi, le problème est difficilement soluble sans approximations supplémentaires, si l'on ne veut pas spécifier de forme particulière pour l'écoulement moyen. Il est cependant possible d'accéder à l'amplitude de diffusion dans le cadre de la première approximation de Born. Nous allons détailler cette approche dans le paragraphe suivant et nous discuterons également de la validité de cette approximation.

3.7 Approximation de Born

3.7.1 Introduction

L'approximation de Born permet d'exprimer, dans la limite du champ lointain, l'amplitude de diffusion du son par un écoulement. Il s'agit d'une approximation très générale dans le cadre des problèmes de diffusion : on obtient souvent une équation d'ondes de la forme (3.35), avec un terme source S qui dépend des quantités ondulatoires. Formellement, la première approximation de Born consiste alors à remplacer les termes ondulatoires dans la source S par l'onde incidente [New82]. L'onde diffusée s'exprime alors simplement en fonction de la transformée de Fourier du terme source [Ish78].

Physiquement, cela revient à négliger les contributions dues aux processus de diffusions multiples. En pratique, cette approximation sera bien vérifiée si le milieu est dilué et/ou si la longueur d'onde de l'onde incidente est grande (voir le paragraphe 3.7.3).

3.7.2 Amplitude de diffusion dans le cas sonore

Expression générale

Dans le cas de la diffusion du son par un écoulement, l'équation d'ondes à résoudre est, à l'ordre \mathcal{M} , la relation (3.35) qui s'écrit, dans le cadre de la première approximation de Born, sous la forme :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right] \rho_{diff} \simeq 2 \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (v_{0i} v_{incj}). \quad (3.36)$$

En supposant que l'onde incidente est une onde plane progressive et monochromatique à la pulsation ν_0

$$\vec{v}_{inc} = v_{0inc} \cos(\nu_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \hat{k} \quad \text{avec} \quad \frac{v_{0inc}}{c} = \frac{\rho_{0inc}}{\rho_0}, \quad (3.37)$$

on obtient, via la méthode des résidus, l'amplitude de diffusion dans la limite du champ lointain [Fab83] pour un écoulement bidimensionnel :

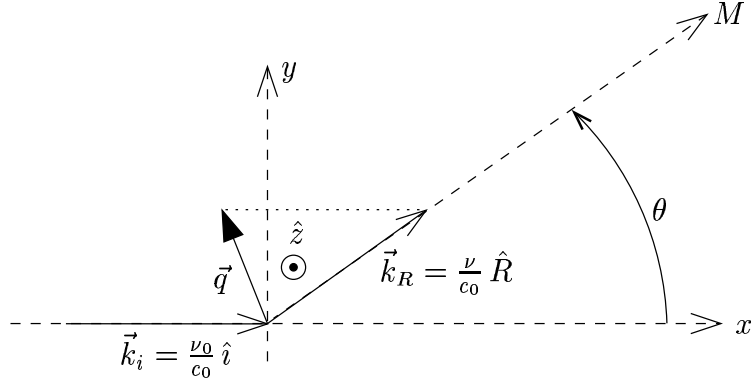
$$f(\theta) = \frac{1}{2c_0} \sqrt{\frac{i\nu}{2\pi c_0}} \cos(\theta) \cotan(\theta/2) \tilde{\Omega}_z(\underbrace{\vec{k}_R - \vec{k}_i}_{\vec{q}}, \underbrace{\nu - \nu_0}_{\Delta\nu}) \quad (3.38)$$

où $\vec{k}_i = \nu_0/c_0 \hat{i}$ (resp. $\vec{k}_R = \nu/c_0 \hat{R}$) est le vecteur d'onde dans la direction incidente (resp. d'observation),

$$\vec{q} = \vec{k}_R - \vec{k}_i \simeq \frac{\nu_0}{c_0} \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

est le vecteur d'onde de diffusion (voir la figure I.27), $\nu \simeq \nu_0$ (l'écoulement est presque stationnaire $T_U \gg 1/\nu_0$) est la fréquence du son diffusé et $\tilde{\Omega}_z$ est la projection selon \hat{z} de la transformée de Fourier en espace et en temps de la vorticité :

$$\tilde{\Omega}(\vec{k}, \nu) = \int \vec{\Omega}(\vec{r}, t) e^{i(\nu t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^2 \vec{r} dt. \quad (3.40)$$

FIG. I.27 – Définition du vecteur de diffusion \vec{q} .

Par analogie avec le résultat général de Kraichnan [Kra53], on peut exprimer l'amplitude de diffusion en fonction des directions d'incidence \hat{i} et d'observation \hat{R} ($\nu \simeq \nu_0$) :

$$\cos(\theta) \cotan(\theta/2) = \frac{2\nu^2}{c_0^2 q^2} (\hat{i} \cdot \hat{R}) (\hat{i} \wedge \hat{R}) \cdot \hat{z} \quad (3.41)$$

ce qui permet d'exprimer l'amplitude de diffusion sous la forme

$$f(\theta) = \frac{1}{c_0^3 q^2} \sqrt{\frac{i\nu^5}{2\pi c_0}} (\hat{i} \cdot \hat{R}) (\hat{i} \wedge \hat{R}) \cdot \tilde{\Omega}(\vec{q}, \Delta\nu). \quad (3.42)$$

Discussion

Cette dernière expression permet, sans connaître le détail de l'écoulement, de donner quelques précisions sur l'allure de l'amplitude de diffusion :

- l'amplitude de diffusion est proportionnelle au nombre de Mach \mathcal{M} dans le cadre de la première approximation de Born ;
- dans le cadre de la première approximation de Born, l'amplitude de diffusion est proportionnelle à la seule composante perpendiculaire au plan de diffusion (plan (\vec{k}_i, \vec{k}_R)) de la transformée de Fourier de la vortécité ;
- si la vortécité de l'écoulement évolue au cours du temps, il est possible de mesurer cette évolution grâce à la diffusion du son, puisque celle-ci est directement reliée à la transformée de Fourier à la fréquence $\Delta\nu$ qui est la fréquence caractéristique de l'écoulement ;
- $f(\theta = \pm\pi/2) = 0$, ce qui est le résultat attendu d'après l'analyse générale de Kraichnan [Kra53] (voir le paragraphe 1.2.2 de l'introduction). Ce résultat est également analogue à celui du rayonnement dipolaire en électromagnétisme [Jac75] ;

- $f(\theta = -\pi) = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de rétrodiffusion. il s'agit d'une différence fondamentale entre la diffusion du son par les gradients de vitesse et la diffusion du son par des inhomogénéités de température : dans ce dernier cas, la diffusion est maximale en rétrodiffusion [Fer74] ;
- dans une direction proche de la direction incidente, $\|\vec{q}\| = 2(\nu/c_0) |\sin(\theta/2)| \ll \nu/c_0$ et l'on peut effectuer un développement limité de $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{\Omega}_z(\vec{q}, \Delta\nu) \simeq \Gamma(\Delta\nu) + i\vec{q} \cdot \vec{P}(\Delta\nu) + \dots \quad (3.43)$$

où Γ est la circulation de l'écoulement considéré et \vec{P} est son moment dipolaire :

$$\begin{aligned} \Gamma(\Delta\nu) &= \tilde{\Omega}_z(\vec{q} = \vec{0}, \Delta\nu) = \iint \Omega_z(\vec{r}, \Delta\nu) d^2\vec{r} \\ \vec{P}(\Delta\nu) &= \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_z}{\partial \vec{q}} \right)_{\vec{q} = \vec{0}} = \iint \vec{r} \Omega_z(\vec{r}, \Delta\nu) d^2\vec{r}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Si la circulation de l'écoulement est nulle, la relation (3.42) se met alors sous la forme

$$f(\theta \simeq 0) = i \sqrt{\frac{i\nu^3}{2\pi c_0^5}} \cos(\theta) \cos(\theta/2) \hat{q} \cdot \vec{P}(\Delta\nu). \quad (3.45)$$

Ainsi, $f(\theta \simeq 0) \propto \cos(\theta) \cos(\theta/2) \hat{q} \cdot \vec{P}$ qui peut-être non nulle (mais reste finie) selon l'orientation du moment dipolaire \vec{P} (voir le paragraphe 2 du chapitre IV par exemple). Par contre, si la circulation totale de l'écoulement n'est pas nulle, l'amplitude de diffusion diverge aux petits angles ;

- dans le cas d'un tourbillon axisymétrique, la transformation $\theta \longrightarrow \theta' = -\theta$ change $\vec{q} = (q_x, q_y)$ en $\vec{q}' = (q_x, -q_y)$ mais laisse inchangé $\tilde{\Omega}_z$ puisque

$$\tilde{\Omega}_z(q) = \int_{r=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \Omega(r) e^{iqr \cos \psi} r dr d\psi \quad (3.46)$$

pour un écoulement à symétrie cylindrique. Ainsi, $f(-\theta) = -f(\theta)$, ce qui est cohérent avec les hypothèses qui ont conduit à l'expression de f dans le cadre de la première approximation de Born : les diffuseurs ne sont affectés que par l'onde plane incidente et dans le cas d'un tourbillon axisymétrique, les gradients de vitesse en $\theta' = -\theta$ sont de signe opposé à ceux en θ ;

- par contre, une symétrie complète du problème de diffusion par rapport au plan $y = 0$, qui correspond à effectuer les transformations $\vec{\Omega} \longrightarrow -\vec{\Omega}$ et $\theta \longrightarrow -\theta$ ne change pas l'amplitude de diffusion f . En effet, le plan $y = 0$ est un plan de symétrie pour l'étude de la diffusion du son par un tourbillon axisymétrique centré en $(x = 0, y = 0)$ (on effectue alors la symétrie sur l'écoulement, l'onde sonore et les microphones d'acquisitions) puisque $\vec{\Omega}$ est un pseudo-vecteur.

Exemples

Nous présentons dans ce paragraphe quelques expressions de l'amplitude de diffusion, pour plusieurs écoulements que nous utiliserons dans la suite de ce travail.

- ▷ pour un vortex de Taylor (circulation totale nulle), de taille caractéristique L , dont la vorticité s'exprime selon (paragraphe 1 du chapitre IV)

$$\vec{\Omega}(r) = \Omega_0 \left(2 - (r/L)^2\right) \exp\left[\frac{1 - (r/L)^2}{2}\right] \hat{z}, \quad (3.47)$$

l'amplitude de diffusion a pour expression :

$$f_T(\theta) = \Omega_0 \frac{8L^4\pi^3 \exp(1/2)}{c\lambda^2} \sqrt{\frac{i}{\lambda}} \cos(\theta) \sin(\theta) \exp\left[-2\left(\frac{2\pi L}{\lambda} \sin(\theta/2)\right)^2\right]; \quad (3.48)$$

- ▷ pour un vortex d'Oseen, de circulation $\Gamma = (\Omega_0\pi L^2)/\alpha$ et de taille caractéristique L , dont la vorticité prend la forme (chapitre V)

$$\vec{\Omega}(\vec{r}) = \frac{\Gamma\alpha}{\pi L^2} \exp\left[-\alpha\frac{r^2}{L^2}\right] \hat{z}, \quad (3.49)$$

l'amplitude de diffusion s'exprime, dans le cadre de la première approximation de Born, selon

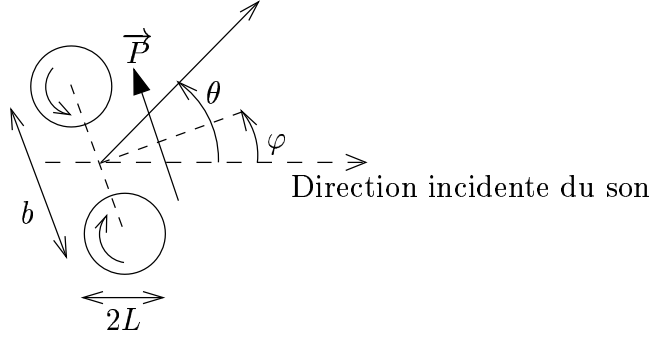
$$f_O(\theta) = \frac{\Gamma}{2c} \sqrt{\frac{i}{\lambda}} \cos(\theta) \cotan(\theta/2) \exp\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{2\pi L}{\lambda} \sin(\theta/2)\right)^2\right]. \quad (3.50)$$

La circulation de l'écoulement n  tant pas nulle, l'amplitude de diffusion f_O diverge pour $\theta \rightarrow 0$ dans le cadre de la première approximation de Born, comme nous l'avons déjà remarqué précédemment ;

- ▷ pour un dipôle de vortex d'Oseen contrarotatifs de circulation globale nulle (figure I.28), dont la vorticité s'exprime comme la somme des vortic  t  s de chaque tourbillon d'Oseen (paragraphe 2 du chapitre IV), l'amplitude de diffusion s'exprime selon :

$$f_D(\theta) = 2i \sin\left[\frac{\pi b}{\lambda} (\sin(\theta - \varphi) + \sin(\varphi))\right] \times f_O(\theta). \quad (3.51)$$

Notons que l'expression (3.51) est analogue à la forme de l'amplitude diffractée en optique par une paire d'obstacles identiques et distants de b : l'amplitude diffractée par chaque obstacle est modul  e par la distance relative entre les deux obstacles $(b/2)/(\lambda)$. Cette modulation permet, dans le cadre de la première approximation de Born en acoustique, de régulariser la divergence de l'amplitude de diffusion d'un seul tourbillon dans la direction incidente.

FIG. I.28 – *Dipôle de vorticité*

3.7.3 Domaine de validité de la première approximation de Born

Validité autour de l'angle d'incidence

Les considérations du paragraphe précédent montrent que l'approximation de Born n'est pas valable autour de l'angle d'incidence dans le cas d'un écoulement à circulation non nulle car l'amplitude de diffusion diverge. Il s'agit d'une divergence caractéristique de ce type d'approximation, et qui provient du fait que l'onde plane incidente n'est pas solution du problème à l'infini : l'écoulement ayant une circulation $\Gamma \neq 0$, sa vitesse varie comme Γ/r en dehors de la zone où $\Omega \neq 0$, ce qui signifie que l'équation d'ondes (3.35) n'est plus valable. Afin de résoudre ce problème de manière satisfaisante, il faut prendre en compte la déformation de l'onde incidente (et de l'onde diffusée) par l'écoulement (réfraction des ondes sonores par l'écoulement) en suivant par exemple l'approche proposée par Klimov [KP87] et que nous avons rappelé au paragraphe 1.7.

Il est également possible de résoudre ce problème de divergence en utilisant des techniques analogues à celles employées en mécanique quantique :

- confinement spatial de l'écoulement en introduisant une coupure dans la décroissance du champ de vitesse [Fet64, BL95, BBL99] analogue au potentiel de Yukawa ([Tay72] paragraphe 9) ;
- calcul analytique de la diffusion du son par une onde incidente non plane, par exemple avec un profil gaussien d'amplitude dans la direction perpendiculaire à la propagation [BL95] ;
- traitements asymptotiques, par exemple des zones de champ proche et de champ lointain [FS99] et calcul des termes correctifs en puissances de \mathcal{M} ;
- développement asymptotique standard dans le cadre de la première approximation de Born et prise en compte de la déformation de l'onde incidente [Sak93].

Les traitements asymptotiques mettent clairement à jour le rôle dominant de la réfraction des ondes sonores dans la direction incidente et le fait que l'on ne peut pas, dans

un secteur angulaire autour de la direction incidente, séparer la diffusion et la réfraction. Ceci est cohérent avec l'analyse de Berry [BCL⁺80] dont nous parlerons au paragraphe 1 du chapitre II. De plus, l'amplitude de diffusion est finie et non nulle pour $\theta = 0$, ce qui satisfait le théorème optique.

Lien avec le théorème optique

Dans le cas d'un tourbillon isolé à circulation nulle, la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion peut être nulle dans la direction incidente. Cela contredit le théorème optique que nous avons évoqué au paragraphe 3.3 (relation (3.7) car $\sigma_{tot} = \sigma_{diff} + \sigma_{abs} \neq 0$.

Il s'agit d'un paradoxe classique de la première approximation de Born qui réside dans le fait qu'il s'agit, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, du premier terme d'un développement en puissances de L/λ ([Tay72] paragraphe 9). Ainsi, à l'ordre 1, le théorème optique n'est pas vérifié car la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion est une correction d'ordre 2, comme le montre la relation (3.7) qui s'écrit, en l'absence d'absorption :

$$\Im \left[f(\theta = 0) e^{-i\pi/4} \right] = \sqrt{\frac{k}{8\pi}} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta. \quad (3.52)$$

On voit très bien la non validité de la première approximation de Born pour la conservation de l'énergie sur l'exemple du dipôle de vorticité :

-    l'aide de l'expression de l'amplitude de diffusion 3.51, on peut calculer σ_{tot}^{Th} à l'aide du théorème optique (3.7) puisque l'amplitude de diffusion est proportionnelle à $i^{3/2}$. En l'absence de phénomènes dissipatifs, $\sigma_{diff} = \sigma_{tot}$ et on obtient ainsi une section efficace de diffusion $\sigma_{diff}^{Th} \propto \mathcal{M}$;
- on peut aussi calculer explicitement la section efficace de diffusion σ_{diff} en utilisant la définition (3.5). On obtient alors clairement une section efficace de diffusion $\sigma_{diff} \propto \mathcal{M}^2$;

Ainsi, la première approximation de Born permet d'obtenir l'allure générale de l'amplitude de diffusion en fonction de l'angle de diffusion, mais n'est pas suffisante pour accéder à la section efficace totale via le théorème optique. Afin de satisfaire à la conservation de l'énergie que traduit le théorème optique, il faut

-    prendre en compte la seconde approximation de Born [BBL99] ;
-    raffiner le traitement de la diffusion autour de la direction incidente, afin de prendre en compte la déformation de l'onde incidente par l'écoulement moyen [KP87] ;
-    utiliser une autre méthode qui permet de s'affranchir de l'approximation de Born, comme par exemple la méthode des ondes partielles [Fet64] que nous avons développée dans le cadre de la diffusion du son (voir le paragraphe 2 du chapitre II ;

- employer des traitements asymptotiques : Ford *et al.* [FS99] ont ainsi montré, dans la limite $\lambda \gg L$, que l'amplitude de diffusion est finie et non nulle pour $\theta = 0$, mais est d'ordre supérieur ou égal à \mathcal{M}^4 .

Validité en fonction des paramètres du problème

Afin de quantifier la validité de la première approximation de Born, nous nous limiterons à des écoulements à circulation nulle, pour lesquelles l'amplitude de diffusion est parfaitement définie pour tout θ . Il est clair que dans le cas d'un écoulement à circulation non nulle, ce critère ne sera plus valable.

Dans le cas d'un écoulement à circulation nulle, la première approximation de Born fournit avec une bonne précision le diagramme polaire de l'amplitude de diffusion. Cependant, même si l'on ne s'intéresse pas à la validation du théorème optique, la première approximation de Born n'est pas vérifiée pour tout type d'écoulement car le nombre de Mach \mathcal{M} intervient dans le terme source de l'équation d'ondes.

Afin de définir le domaine de validité de cette approximation, nous allons reprendre dans ce paragraphe l'approche de Lund et al [Lun89] qui utilise des fonctions de Green afin de résoudre l'équation d'ondes (3.35) :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right] \rho_{diff} = 2 \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (v_{0i} v_{sj}) = S(\vec{r}, \vec{v}_s). \quad (3.53)$$

Rappelons que cette relation n'est valable qu'à l'ordre Mach et si l'on suppose l'écoulement stationnaire lors de la diffusion (paragraphe 3.6).

En utilisant le formalisme des fonctions de Green (voir l'annexe 3.D), on peut écrire la solution de (3.53) sous la forme générale :

$$\rho_{diff}(\vec{r}, t) = \int G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') S(\vec{r}', \vec{v}_s) dt' d\vec{r}' \quad (3.54)$$

dans le cas d'un problème aux conditions aux limites libres (conditions de rayonnement à l'infini).

La première approximation de Born consiste alors à remplacer \vec{v}_s par \vec{v}_{inc} dans le terme source S , ce qui conduit à

$$\rho_{diff}^{Born1}(\vec{r}, t) = \int_{\mathcal{V}} G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') S(\vec{r}', \vec{v}_{inc}') dt' d\vec{r}' \quad (3.55)$$

où \mathcal{V} est le volume contenant les sources et $\vec{v}_{inc}' = \vec{v}_{inc}(\vec{r}', t')$, que l'on peut aussi écrire en introduisant la transformée de Fourier temporelle de G :

$$\rho_{diff}^{Born1}(\vec{r}, t) = \int_{\mathcal{V}} d\vec{r}' d\nu G(\vec{r} - \vec{r}', \nu) S(\vec{r}', \vec{v}_{inc}') \quad (3.56)$$

Ainsi, la première approximation de Born correspond à une approximation d'ordre \mathcal{M} du terme source. La prise en compte de la deuxième approximation de Born fait intervenir des termes en \mathcal{M}^2 par itération du processus précédent :

$$\rho_{diff}^{Born2}(\vec{r}, t) = \int_{\mathcal{V}} d\vec{r}' d\nu G(\vec{r} - \vec{r}', \nu) S \left[\vec{r}', \int_{\mathcal{V}} d\vec{r}'' d\nu G(\vec{r}' - \vec{r}'', \nu) S(\vec{r}'', \vec{v}_{inc}'') \right] \quad (3.57)$$

Afin de calculer la correction à cet ordre, il est aussi nécessaire de prendre en compte les termes en \mathcal{M}^2 dans le terme source S de la solution (3.56) [BBL99]. Cependant, si l'on se ne s'intéresse qu'à la validité de l'approximation de Born, on peut se contenter de comparer les deux expressions (3.56) et (3.57) : la première approximation de Born sera valide si $\rho_{diff}^{Born2}(\vec{r}, \nu) \ll \rho_{diff}^{Born1}(\vec{r}, \nu)$.

Nous nous placerons à trois dimensions afin de donner un critère de validité de l'approximation de Born, car la fonction de Green du problème est plus simple à évaluer (relation 3.103.a) :

$$G^{3D}(\vec{r} - \vec{r}', \nu) = \frac{e^{i\nu \|\vec{r} - \vec{r}'\|/c}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (3.58)$$

D'après la relation (3.53), si l'onde incidente est plane et monochromatique,

$$S \propto \mathcal{M} v_{inc} \left(\frac{1}{\lambda L} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \simeq A \mathcal{M} v_{inc} \frac{1}{\lambda L} \quad (3.59)$$

dans le cas $\lambda \simeq L$ ou $\lambda \gg L$ (il n'y a pas de terme en $1/L^2$ car l'écoulement moyen est supposé incompressible. Ainsi,

$$\begin{aligned} |\rho_{diff}^{Born1}| &\simeq \frac{L^3}{R} A \frac{\mathcal{M}}{\lambda L} v_{inc} \\ |\rho_{diff}^{Born2}| &\simeq \frac{L^3}{R} \times A \frac{L^3}{L} \left(\frac{\mathcal{M}}{\lambda L} \right)^2 v_{inc} \simeq A \frac{\mathcal{M}^2 L^3}{R \lambda^2} v_{inc}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

d'où

$$\frac{|\rho_{diff}^{Born2}|}{|\rho_{diff}^{Born1}|} \simeq \frac{\mathcal{M} L}{\lambda}. \quad (3.61)$$

Dans le cas de l'interaction d'une onde sonore de longueur d'onde λ avec un écoulement de taille caractéristique L et de nombre de Mach \mathcal{M} , l'approximation de Born est donc vérifiée si

$$\mu = \frac{2\pi L}{\lambda} \mathcal{M} = \beta \mathcal{M} \ll 1 \quad (3.62)$$

en introduisant le paramètre $\beta = 2\pi L/\lambda$. L'analogie avec l'optique, où le nombre de Mach est remplacé par l'indice n du milieu, éclaire la signification de cette approximation. Ainsi, la relation (3.62) signifie que la variation de la phase de l'onde (proportionnelle à n/λ) doit être faible après traversée du milieu de taille L .

Cette approximation est beaucoup moins restrictive que celle de la diffusion Rayleigh, dans laquelle nous avons remplacé le champ sonore par le champ incident sur le volume de diffusion (relation 3.27). Dans le cadre de l'approximation de Born, on suppose que l'on peut localement négliger les diffusions multiples : $\lambda \simeq L$, le milieu doit être dilué, ce qui est équivalent dans le cadre de la diffusion du son par les écoulements à considérer $\mathcal{M} \ll 1$.

Ce critère est très général pour caractériser la validité de l'approximation de Born [New82, Ish78]. Comme nous le verrons au paragraphe 1.4.3 du chapitre IV, il reste valide à deux dimensions.

3.8 Rôle de la composante potentielle dans la diffusion

L'expression de l'amplitude de diffusion que nous avons présentée au paragraphe (3.7.2) ne fait intervenir que la vorticité de l'écoulement. On peut toujours décomposer la vitesse de l'écoulement, en l'absence de parois, sous la forme [How00]

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_\Omega + \overrightarrow{\text{grad}} \phi_0 \quad (3.63)$$

où

$$\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}_0 \quad (3.64)$$

est la vorticité de l'écoulement. La partie $\overrightarrow{\text{grad}} \phi_0$ apparaît ainsi comme la composante compressible de l'écoulement, qui est négligeable à l'ordre \mathcal{M} si $\vec{v}_\Omega \neq \vec{0}$ (voir l'annexe 3.C), ce qui explique qu'en présence de vorticité, ce terme n'apparaît pas dans la diffusion et que l'amplitude de diffusion ne dépende que de la vorticité, i.e. de la partie antisymétrique du tenseur des gradients de vitesses.

Cependant, l'analyse du terme source de l'équation d'ondes (3.35) montre que les gradients sont responsables de la diffusion du son. La partie symétrique du tenseur des vitesses, qui est lié à $\overrightarrow{\text{grad}} \phi_0$, participe donc également à la diffusion du son. Dans de nombreuses situations, la présence de vorticité dans l'écoulement, engendrée par les conditions expérimentales aux limites : un écoulement hyperbolique ($v_x = \alpha x$, $v_y = -\alpha y$ et $v_z = 0$), qui est potentiel, nécessite expérimentalement la présence de jets qui vont introduire de la vorticité.

Une situation expérimentale dans laquelle l'écoulement moyen est purement potentiel conduit à de la diffusion. Supposons que l'écoulement moyen $\vec{v}_0 = \overrightarrow{\text{grad}} \phi_0$ ainsi créé soit d'ordre \mathcal{M} . Il est alors possible d'utiliser la relation (3.35) modélisant la diffusion du son par un écoulement à l'ordre \mathcal{M} et d'en déduire l'amplitude de diffusion dans le cadre de la première approximation de Born.

À l'aide du formalisme précédent, on peut écrire, de manière très générale [Lun00], à trois dimensions, la masse volumique sonore diffusée à la pulsation ν

$$\tilde{\rho}_{diff}(\vec{R}, \nu) = \frac{\rho_0 v_{incj}}{c_0} \frac{4\pi^3}{c_0} \frac{e^{i\nu R/c_0}}{R} k_i k_j \tilde{v}_{0i}(\vec{q}, \Delta\nu) \quad (3.65)$$

qui se transpose à deux dimensions sous la forme [Roj88]

$$\tilde{\rho}_{diff}(\vec{R}, \nu) = \frac{\rho_0 v_{incj}}{c_0} \sqrt{\frac{2\pi^3}{c_0 \nu}} \frac{e^{i\nu R/c_0}}{\sqrt{R}} e^{i\pi/4} k_i k_j \tilde{v}_{0i}(\vec{q}, \Delta\nu). \quad (3.66)$$

Or,

$$\vec{v}_0 = \overrightarrow{\text{grad}} \phi_0 \longleftrightarrow \tilde{v}_{0i}(\vec{q}, \Delta\nu) = q_i \tilde{\phi}_0(\vec{q}, \Delta\nu) \quad (3.67)$$

d'où, à deux dimensions

$$\tilde{\rho}_{diff}(\vec{R}, \nu) = \frac{\rho_0 k_j v_{incj}}{c_0} \sqrt{\frac{2\pi^3}{c_0 \nu}} \frac{e^{i\nu R/c_0}}{\sqrt{R}} e^{i\pi/4} k_i q_i \tilde{\phi}_0(\vec{q}, \Delta\nu). \quad (3.68)$$

En introduisant l'angle de diffusion θ , on peut écrire, en supposant que $\nu \simeq \nu_0$,

$$\begin{aligned} k_i q_i &= \frac{\nu^2}{c_0^2} [1 - \nu_0 \underbrace{\hat{x}_i \cdot \hat{x}_{inc_i}}_{\cos \theta}] \simeq \frac{\nu^2}{c^2} [1 - \cos \theta] \\ k_j v_{inc_j} &= \frac{\nu}{c_0} v_{inc} \hat{x}_j \cdot \hat{x}_{inc_j} = \frac{\nu}{c_0} \cos \theta. \\ \frac{\rho_0 v_{inc}}{c_0} &= \rho_{inc} \end{aligned} \quad (3.69)$$

ce qui permet d'obtenir l'amplitude de l'onde diffusée

$$\tilde{\rho}_{diff}(\vec{R}, \nu) = \sqrt{\frac{2i\pi^3 \nu^5}{c_0^7}} \cos \theta (1 - \cos \theta) \frac{e^{i\nu R/c_0}}{\sqrt{R}} \tilde{\phi}_0(\vec{q}, \Delta\nu) \quad (3.70)$$

et l'amplitude de diffusion $f_\phi(\theta)$ pour une onde incidente monochromatique de pulsation ν_0 :

$$f_\phi(\theta) = \sqrt{\frac{2i\pi^3 \nu^5}{c_0^7}} \cos \theta (1 - \cos \theta) \tilde{\phi}_0(\vec{q}, \Delta\nu). \quad (3.71)$$

L'amplitude de diffusion ne diverge jamais dans la direction incidente, même si $\tilde{\phi}_0(\vec{q} = \vec{0}, \Delta\nu) \neq 0$, ce qui constitue une différence importante avec la diffusion par la vortécité de l'écoulement. De plus, f_ϕ peut présenter un maximum en rétrodiffusion, selon la forme de $\tilde{\phi}_0$.

Nous avons ainsi étudié la diffusion d'une onde sonore plane par l'écoulement purement potentiel engendré dans le fluide par une onde de surface de faible amplitude ([LL89b] paragraphe 12) dans la limite des grandes longueurs d'ondes devant la profondeur du canal.

3.9 Forme générale de l'amplitude de diffusion

3.9.1 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet d'obtenir une forme générale de l'amplitude de diffusion dans le cas de l'interaction d'une onde sonore avec un écoulement turbulent.

Les quantités caractérisant la diffusion du son par un écoulement sont

- la vitesse caractéristique U et la taille caractéristique L pour l'écoulement ;
- la longueur d'onde λ et la célérité du son c pour l'onde sonore ;
- la section efficace de diffusion σ_{diff} .

5 quantités permettent de décrire le phénomène, et ne dépendent que de deux dimensions (longueur et temps). Ainsi, d'après le théorème II [Bar96], il existe une relation entre 3 nombres sans dimensions.

Dans le cas bidimensionnel, on a ainsi

$$\frac{\sigma_{diff}}{L} = g(\mathcal{M}, \lambda/L). \quad (3.72)$$

Pour un écoulement donné (L et \mathcal{M} fixés), on doit retrouver la limite de la diffusion de Rayleigh (paragraphe 3.5) lorsque $\lambda/L \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\lambda/L \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{diff}}{L} = \mathcal{M}^2 \left(\frac{L}{\lambda} \right)^\alpha \quad \text{avec } \alpha \geq 1 \quad (3.73)$$

d'après la relation (3.29), α dépendant de la nature des diffuseurs : à deux dimensions, $\alpha = 3$ pour un dipôle (voir les relations 3.51 et 3.50), $\alpha = 5$ pour un quadrupole (voir la relation 3.48). De plus, dans la limite des courtes longueurs d'ondes,

$$\lim_{\lambda/L \rightarrow 0} \sigma_{diff} = \sigma_g = C^{te} \quad (3.74)$$

d'après le paradoxe d'extinction ([Ish78] chapitre 2), où σ_g est la section efficace géométrique.

Ainsi, la section efficace de diffusion peut s'écrire sous la forme très générale

$$\sigma_{diff} = \mathcal{M}^2 L \left(\frac{L}{\lambda} \right)^\alpha G(\mathcal{M}, \lambda/L) \quad (3.75)$$

et l'amplitude de diffusion s'exprime alors selon :

$$f(\theta) = \mathcal{M} \sqrt{L} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{\alpha/2} \sqrt{G(\mathcal{M}, \lambda/L)} \quad (3.76)$$

où la fonction G se comporte asymptotiquement selon

$$\begin{cases} \lim_{\lambda/L \rightarrow \infty} G(\mathcal{M}, \lambda/L) &= C^{te} \\ \lim_{\lambda/L \rightarrow 0} G(\mathcal{M}, \lambda/L) &= \frac{\sigma_g}{\mathcal{M}^2 L} \left(\frac{\lambda}{L} \right)^\alpha \end{cases} \quad (3.77)$$

3.9.2 Approximation de Born

Dans le cadre de l'approximation de Born (voir le paragraphe 3.7.2), l'amplitude de diffusion est proportionnelle au nombre de Mach de l'écoulement car on ne s'intéresse qu'aux diffusions simples du son par l'écoulement. Ainsi, dans cette limite, l'amplitude de diffusion (3.76) se met sous la forme plus simple

$$f(\theta) = \mathcal{M} \sqrt{L} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{\alpha/2} \sqrt{F(\lambda/L)} \quad (3.78)$$

où les comportements asymptotiques de F sont analogues à ceux de la fonction G donnés par la relation (3.77).

Annexes

3.A Critère du champ lointain

Supposons que le milieu diffusant soit contenu dans un volume (\mathcal{V}) de taille caractéristique L , entouré par une surface (\mathcal{S}) . D'après le principe d'Huygens-Fresnel, chaque point Q de la surface (\mathcal{S}) contribue à l'onde sonore détectée au point d'observation P selon [BW99]

$$d\rho_{diff}(P) = \mathcal{A}(Q) \frac{e^{ikr}}{r} dS_Q \quad (3.79)$$

avec les notations de la figure I.29, $\mathcal{A}(Q)$ étant proportionnelle à l'amplitude de l'onde diffusée au point Q par le volume (\mathcal{V}) et $k = 2\pi/\lambda$. Cette description présente l'avantage ne pas avoir à détailler les processus de diffusion de l'onde incidente dans (\mathcal{V}) , qui sont uniquement modélisés par $\mathcal{A}(Q)$.

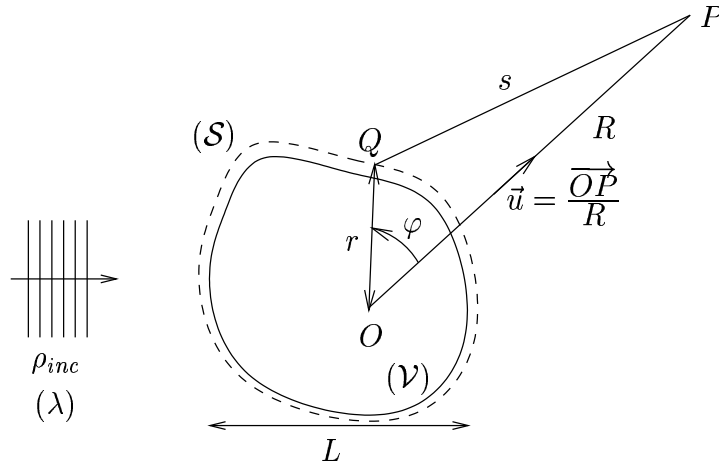


FIG. I.29 –

Ainsi, l'onde diffusée au point P s'exprime selon

$$\rho_{diff}(P) = \oint_{\mathcal{S}} \mathcal{A}(Q) \frac{e^{iks}}{s} dS_Q. \quad (3.80)$$

Si l'on se situe loin des sources secondaires Q , on peut écrire

$$\begin{aligned} s = \|\vec{Q\vec{P}}\| &= R \left(1 - \frac{2\vec{O\vec{Q}} \cdot \vec{O\vec{P}}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right) \\ &\simeq R \left\{ 1 - \frac{\vec{O\vec{Q}} \cdot \vec{u}}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{2(\vec{O\vec{Q}} \cdot \vec{u})^2}{R^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

La variation de distance est essentiellement sensible sur la partie oscillante de l'intégrale (3.80), ce qui permet d'écrire :

$$\rho_{diff}(P) \simeq \frac{e^{ikR}}{R} \oint_{(S)} \mathcal{A}(Q) \exp \left[-ik (\vec{O\vec{Q}} \cdot \vec{u}) \right] \exp \left[i \frac{k}{2R} (r^2 - 2(\vec{O\vec{Q}} \cdot \vec{u})^2) \right] dS_Q. \quad (3.82)$$

Cette expression correspond à une onde localement sphérique, mais dont l'amplitude dépend de manière assez compliquée de la position de la source secondaire Q . Dans la limite du champ lointain, on souhaite pouvoir exprimer l'onde diffusée sous la forme (3.3) :

$$\rho_{diff} = f(\varphi) \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}} \quad (3.83)$$

où l'angle φ est défini sur la figure I.29. Par cela, il est nécessaire que l'intégrand de la relation (3.82) ne dépende plus de la distance R , ce qui conduit à la condition

$$\forall Q, \quad \exp \left[i \frac{k}{2R} (r^2 - 2(\vec{O\vec{Q}} \cdot \vec{u})^2) \right] \simeq 1 \quad (3.84)$$

que l'on peut exprimer, dans le cas le plus défavorable, sous la forme

$$\forall Q \quad \frac{k (\vec{O\vec{Q}} \cdot \vec{u})^2}{R} \ll 1 \quad (3.85)$$

d'où l'on déduit la condition de champ lointain

$$R \gg \frac{2\pi L_\perp^2}{\lambda} \simeq \frac{2\pi L^2}{\lambda}. \quad (3.86)$$

L_\perp est ici la longueur caractéristique de l'objet diffusant dans la direction transverse à la direction d'observation, que l'on peut assimiler à L . Cette approximation de champ lointain est analogue au critère de Fraunhofer pour la diffraction en optique.

Dans le cas où les diffuseurs sont situés dans un plan perpendiculaire à \vec{u} (cas d'un émetteur plan par exemple), $\vec{O\vec{Q}} \cdot \vec{u} = 0$ pour tout élément du plan diffusant. La condition (3.84) se réduit alors à

$$\forall Q \quad \frac{k r^2}{2R} \ll 1 \quad (3.87)$$

qui conduit au même critère de champ lointain (3.86).

3.B Théorème optique

Il nous semble intéressant de reprendre ici la démonstration du théorème optique [New82], afin de bien en comprendre la signification. Pour cela, nous nous placerons dans l'approximation du champ lointain, ce qui permet d'écrire

$$\Psi = \Psi_{inc} + \Psi_{diff} = \Psi_{inc} + |\Psi_{inc}| f(\theta) \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}} \quad (3.88)$$

conformément à la définition (3.3), Ψ étant une onde de type quelconque. En notant \hat{x} la direction incidente, cette expression prend la forme

$$\Psi(R, \theta) = \Psi_{inc} \left[1 + f(\theta) \frac{e^{ik(R-x)}}{\sqrt{R}} \right]. \quad (3.89)$$

en un point quelconque (R, θ) . Calculons l'intensité reçue sur un écran (E) placé à une distance x et parallèle à la direction \hat{y} perpendiculaire à la direction de propagation. Pour simplifier, nous allons supposer que l'intensité de l'onde est proportionnelle à $|\Psi|^2$: $I = B |\Psi|^2$. Ainsi, sur un point de l'écran repéré par l'angle θ par rapport à la direction incidente \hat{x} ,

$$dI(\theta) = dI_{inc} + \frac{2dI_{inc}}{\sqrt{r}} \Re \left[f(\theta) e^{ik(R-x)} \right] + dI_{inc} \left| \frac{f(\theta)}{r} \right|^2. \quad (3.90)$$

Soit $2D$ la taille de l'écran. On se place dans l'approximation $x \gg D$ et on peut ainsi effectuer un développement analogue à (3.81) et se limiter au premier ordre en $1/\sqrt{r} \simeq 1/\sqrt{x}$ dans l'amplitude de l'expression (3.90) :

$$dI(\theta) \simeq dI_{inc} + \frac{2dI_{inc}}{\sqrt{x}} \Re \left\{ f(0) \exp \left[\frac{ik}{2x} y^2 \right] \right\}. \quad (3.91)$$

L'intensité totale reçue sur l'écran est alors

$$I_{(E)} \simeq dI_{inc} (2D) + \frac{2dI_{inc}}{\sqrt{x}} \Re \left\{ f(0) \underbrace{\int_{-D}^D \exp \left[\frac{ik}{2x} y^2 \right] dy}_{J_y} \right\}. \quad (3.92)$$

Nous supposons de plus que la taille de l'écran vérifie $\sqrt{x\lambda} \ll D$. Ainsi, $ky^2/(2x) \gg \pi$ et on a

$$J_y \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{ik}{2x} y^2 \right] dy. \quad (3.93)$$

Cette intégrale de Fresnel peut alors être évaluée à partir de la méthode de la phase stationnaire ([BW99] p889) :

$$J_y \simeq \sqrt{\frac{2\pi x}{k}} e^{i\pi/4}. \quad (3.94)$$

Ainsi, (3.92) devient

$$I_{(E)} \simeq dI_{inc} \left(2D - \sqrt{\frac{8\pi}{k}} \Re [f(0) e^{-3i\pi/4}] \right). \quad (3.95)$$

Le deuxième terme de cette expression correspond à l'énergie perdue par le faisceau incident et recue sur l'écran (E). En utilisant la définition (3.6) de la section efficace totale, on a ainsi

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{8\pi}{k}} \Re [f(0) e^{-3i\pi/4}] = \sqrt{\frac{8\pi}{k}} \Im [f(0) e^{-i\pi/4}]. \quad (3.96)$$

3.C Validité de l'hypothèse d'incompressibilité

On souhaite ici expliciter de manière claire l'approximation d'incompressibilité de l'écoulement moyen \vec{v}_0 . Pour cela, supposons que l'écoulement moyen soit compressible, ce qui induit une perturbation de masse volumique $\rho_0(\vec{r}, t)$. Nous supposons de plus qu'il n'y a pas d'ondes sonores se propageant dans le milieu. Ainsi, par rapport au fluide au repos :

$$\begin{aligned} \rho_0(\vec{r}, t) &= \rho_{rep} + \rho^{(1)}(\vec{r}, t) \\ \vec{v}_0(\vec{r}, t) &= \vec{0} + \vec{v}^{(1)}(\vec{r}, t) \\ p_0(\vec{r}) &= p_{rep} + p^{(1)}(\vec{r}, t). \end{aligned}$$

Le nombre de Mach de l'écoulement vérifie $\mathcal{M} \ll 1$: $\rho^{(1)}$ et $p^{(1)}$ sont donc considérées comme des perturbations par rapport au repos ρ_{rep} et p_{rep} . À partir de l'équation d'Euler, on peut écrire, à l'ordre le plus bas en perturbation :

$$\rho_{rep} \left(\vec{v}^{(1)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}^{(1)} = -\overrightarrow{\text{grad}} p^{(1)}.$$

Or, puisqu'il s'agit de perturbations liées à la compressibilité du fluide, on a $p^{(1)} = c^2 \rho^{(1)}$, ce qui conduit à

$$\rho_{rep} \left(\vec{v}^{(1)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}^{(1)} = -c^2 \overrightarrow{\text{grad}} \rho^{(1)}.$$

Soient L et U la taille et la vitesse caractéristique de l'écoulement compressible $\vec{v}^{(1)}$. La relation précédente conduit, en ordres de grandeur, à :

$$\rho_{rep} \frac{U^2}{L} \simeq c^2 \frac{\rho^{(1)}}{L} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\rho^{(1)}}{\rho_{rep}} \simeq \frac{U^2}{c^2} = \mathcal{M}^2.$$

Les perturbations $\rho^{(1)}/\rho_{rep}$ liées à la compressibilité du milieu sont donc d'ordre \mathcal{M}^2 pour cet écoulement.

L'équation de conservation de la masse (1) s'écrit :

$$\rho \operatorname{div} \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(1)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho^{(1)} = 0$$

pour cet écoulement stationnaire. Cette relation se réduit à la relation (2) (valable pour un fluide incompressible) si l'on peut négliger le deuxième terme devant le premier. Or,

$$\frac{\vec{v}^{(1)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho^{(1)}}{\rho \text{div} \vec{v}^{(1)}} \simeq \frac{U \rho^{(1)}}{L} \frac{L}{\rho U} = \frac{\rho^{(1)}}{\rho} \simeq \frac{\rho^{(1)}}{\rho_{rep}} \simeq \mathcal{M}^2.$$

Ainsi, l'équation de conservation de la masse se réduit à

$$\text{div} \vec{v}^{(1)} = 0 \quad \text{à l'ordre } \mathcal{M}.$$

L'écoulement moyen peut donc être considéré comme incompressible à l'ordre \mathcal{M} .

Remarque : en l'absence d'écoulement moyen, la condition d'incompressibilité précédente n'est plus valable: la vitesse d'une onde sonore peut aisément vérifier $\mathcal{M}^2 \ll 1$ mais le milieu doit quand même être considéré comme compressible. Dans le cas d'un écoulement instationnaire, la prise en compte de son temps caractéristique d'évolution τ permet de construire le nombre de Strouhal [LL89b] $S_t = U\tau/L$. Le critère d'incompressibilité se traduit alors par

$$\mathcal{M}^2 \ll 1 \quad \text{et} \quad S_t \ll 1.$$

3.D Fonctions de Green de l'équation d'ondes

La fonction de Green $G(\vec{x}, t)$ permettant d'écrire la solution générale d'une équation d'ondes de la forme

$$\frac{1}{c_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta \right] \Psi = S(\vec{r}, t) \quad (3.97)$$

est solution de [Won91]

$$\frac{1}{c_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta \right] G = \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \delta(t - t'). \quad (3.98)$$

Ainsi, la solution formelle de (3.97) s'écrit comme le produit de convolution du terme source par la fonction de Green

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') S(\vec{r}', t') dt' d\vec{r}' \quad (3.99)$$

Remarque : nous n'avons pas encore explicité la forme de la fonction de Green, qui dépend du nombre de dimensions du problème étudié et peut aussi dépendre des conditions aux limites (fonctions de Green compactes [How00]). De même, la solution (3.99) n'est valable que si l'on résout un problème avec des conditions aux limites s'annulant à l'infini (conditions radiatives). Dans le cas contraire, la solution est notablement plus compliquée car il faut prendre en compte des termes de bords ([BW99] chapitre XIII). Dans le cas de la diffusion du son, ces termes supplémentaires n'interviennent pas car on résout justement le problème de diffusion avec des conditions aux limites radiatives [Lun89].

Dans le cas de conditions radiatives à l'infini, les fonctions de Green solution de l'équation (3.98) s'écrivent :

$$G^{3D}(\vec{x}, t) = \frac{\delta[t - \|\vec{x}\|/c]}{4\pi \|\vec{x}\|} \quad (3.100.a)$$

$$G^{2D}(\vec{x}, t) = \frac{\mathcal{H}(t - \|\vec{x}\|/c)}{2\pi \sqrt{t^2 - \|\vec{x}\|^2/c^2}} \quad (3.100.b)$$

où \mathcal{H} est la fonction de Heaviside:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= 0 & x < 0 \\ &= 1 & x > 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Elles expriment bien le fait que la propagation de l'information s'effectue à la vitesse c : l'information n'atteint un point \vec{x} donné que pour $t \geq \|\vec{x}\|/c$.

Dans l'espace de Fourier, avec la définition

$$\tilde{F}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int F(t) e^{i\nu t} dt \quad (3.102)$$

la fonction de Green solution du problème (3.98) s'exprime selon

$$\tilde{G}^{3D}(\vec{x}, \nu) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^{i k \|\vec{x}\|}}{\|\vec{x}\|} \quad (3.103.a)$$

$$\tilde{G}^{2D}(\vec{x}, \nu) = \frac{i}{8\pi} H_0^1\left(\frac{\nu}{c} \|\vec{x}\|\right) \quad (3.103.b)$$

Dans la limite $\nu \|\vec{x}\|/c \gg 1$, on peut employer la forme asymptotique de la fonction de Hankel, ce qui conduit, en posant $k = \nu/c$, à

$$\tilde{G}^{2D}(\vec{x}, \nu) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k \|\vec{x}\|}} e^{i k \|\vec{x}\|} e^{-i\pi/4}. \quad (3.104)$$

Ainsi, dans la limite du champ lointain, la fonction de Green se met sous la forme

$$G^d(\vec{r}, \nu) \propto \frac{e^{i(k \|\vec{r}\| - \nu t)}}{r^{(d-1)/2}} \quad (3.105)$$

où d est la dimension de l'espace.

Remarque : d'un point de vue dimensionnelle, $\delta(y)$ a la dimension de $1/y$. Ainsi, la fonction de Green solution de (3.98) ne dépend dimensionnellement que des quantités sonores k et $\omega = ck$:

$$G^d(\vec{r}, t) \propto c k^{(d-1)} \longleftrightarrow G^d(\vec{r}, \nu) \propto k^{(d-2)}. \quad (3.106)$$

À l'aide de la relation (3.105), on peut compléter l'expression de $G^d(\vec{r}, \nu)$, à un facteur numérique A près :

$$G^d(\vec{r}, \nu) = \frac{A}{k} \left(\frac{k}{r}\right)^{(d-1)/2} e^{i(k \|\vec{r}\| - \nu t)}. \quad (3.107)$$

Chapitre II

Méthode des ondes partielles

Cruc se mâchait nerveusement les lèvres. Il avait devant lui une feuille de papier couverte de calculs et d'équations du vingt-sixième degré, irrésolues et hésitantes.

B. Vian.

1. Introduction

Il est toujours possible pour de petites longueurs d'onde ($\lambda \ll L$) de traiter l'interaction son-écoulement dans le cadre de l'acoustique géométrique, comme nous l'avons vu au paragraphe 1 du chapitre I. Cette approche, à l'aide de l'eikonale, permet de tracer les rayons acoustiques et de remonter à la répartition spatiale de l'énergie acoustique. L'approche la plus simple permet, grâce à l'équation de Landau, le tracé de rayons à l'ordre \mathcal{M} . Cependant, cette relation ne permet pas de remonter à la structure du champ acoustique car le vecteur d'onde \vec{k} , qui est perpendiculaire aux équiphases, n'est plus colinéaire à la vitesse de groupe de l'onde sonore et par conséquent aux rayons. De plus, cette équation n'est valable qu'à l'ordre \mathcal{M} en supposant que l'écoulement présente de la vortécité [LL89b]. Plus généralement, il faut prendre en compte les termes d'ordre supérieur, en tenant notamment compte de la variation locale de la vitesse du son (qui est d'ordre \mathcal{M}^2) [Bro77, Lig92]. On peut ainsi calculer non seulement les rayons acoustiques, mais également l'amplitude et la phase de l'onde sonore le long d'un rayon [Blo46, CLM94].

Cependant, ce traitement présente deux inconvénients :

- il n'est valable que dans la limite des très petites longueurs d'onde $\lambda \ll L$;
- il ne donne accès à la répartition spatiale du son (phase et amplitude) que dans les zones où les rayons ne se croisent pas (absence de caustiques). Au niveau des caustiques (analogues par exemple aux foyers d'une lentille en optique), cette approche est incorrecte car elle conduit à une divergence de l'intensité sonore. La résolution est alors plus complexe [Jon63].

Nous avons donc développé une méthode permettant de s'affranchir de ces deux problèmes, i.e. une méthode valable à la fois pour des longueurs d'onde comparables à la taille caractéristique ($\lambda \simeq L$) de l'écoulement étudié et pour $\lambda \ll L$ et permettant d'accéder à la structure spatiale de l'onde sonore, ainsi que localement, à sa phase et à son amplitude. Cette méthode est basée sur l'utilisation des ondes partielles, déjà employées dans le cadre de l'étude de la diffusion du son par un écoulement [Fet64, RMO97, UL97], et son application est particulièrement bien adaptée pour des problèmes bidimensionnels à symétrie cylindrique.

La méthode des ondes partielles a été développée en électromagnétisme pour traiter les problèmes de diffusions par des diffuseurs à symétrie sphérique [Jac75] (chapitre 16) puis utilisée en mécanique quantique dans le cadre de la diffusion de particules par des potentiels centraux [Tay72] (chapitre 11). L'analogie entre la diffusion de particules en

mécanique quantique et la diffusion d'ondes de surface par un écoulement à circulation non nulle a été mise en évidence par Berry *et al.* [BCL⁺80] avec l'étude d'un faisceau de particules chargées diffusées par un solénoïde de flux magnétique non nul : il apparaît une dislocation dans la fonction d'onde (effet Aharonov-Bohm [AB59]). L'intérêt des ondes de surface est que leur phase est mesurable, au contraire de la mécanique quantique où seul le module de la fonction d'onde a une signification physique. Ainsi, Berry *et al.* ont également effectué des expériences afin d'étudier l'interaction entre un tourbillon et des ondes de surface. Ils ont ainsi pu mettre en évidence la présence de dislocations. Plus récemment, Vivanco *et al.* [VMCL99] ont également étudié cette interaction et l'ont comparé avec les travaux analytiques de Coste *et al.* [CLU99, CL99], qui ont appliqué le formalisme des ondes partielles au cas de la diffusion d'ondes de surface par la vortécité dans la limite des courtes longueurs d'onde et du régime d'eau peu profonde.

Dans le cadre de l'acoustique, l'effet Aharonov-Bohm a été mis en évidence expérimentalement par Roux *et al.* [RdRTF97] à l'aide d'un miroir acoustique à renversement temporel et par Labbé *et al.* [Lab96, LP98] à l'aide de mesures ultrasonores directes. Umeki *et al.* [UL97] ont quant à eux appliqué la méthode des ondes partielles à la diffusion du son afin d'étudier les ondes spirales engendrées lors de l'interaction d'une onde sonore et d'un tourbillon en rotation solide.

Remarque : Dans ce chapitre, l'angle polaire θ sera défini par rapport à la direction d'incidence (voir la figure II.1). Ainsi, la diffusion vers l'avant aura lieu pour un angle $\theta = \pi$ et l'angle de diffusion (voir le paragraphe 3 du chapitre I) sera donc défini par $\theta - \pi$.

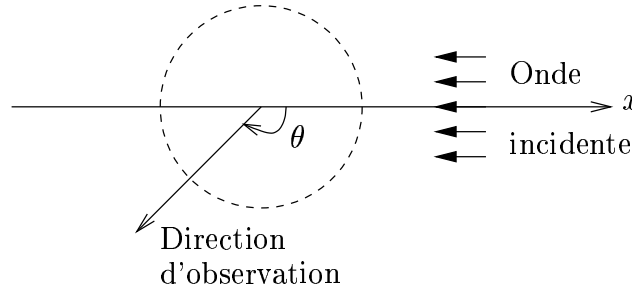


FIG. II.1 – Définition de l'angle polaire θ dans le cadre des ondes partielles

2. Application à la diffusion du son

2.1 Introduction

La méthode des ondes partielles a été utilisée en acoustique dans le cadre de l'étude de la diffusion du son par la vorticité. Fetter [Fet64] l'utilise pour déterminer la diffusion du son par un vortex de circulation Γ dans les limites asymptotiques du champ lointain et des grandes longueurs d'ondes. Golemshtok *et al.* [GF80] ont utilisé ce formalisme pour l'étude analytique de la diffusion et de l'absorption du son par des tourbillons bidimensionnels dont la vorticité est de la forme $\Omega(r) = A + B/r^2$ et Fabrikant [Fab00] l'a étendu à d'autres types de tourbillons. Reinschke *et al.* [RMO97] l'ont quand à eux appliqué à des tourbillons compressibles, en effectuant une analogie avec les concepts de diffusion en mécanique quantique [Tay72] (chapitre 11). Tout comme Fetter, ils ont introduit la notion de saut de phase qui permet d'exprimer, formellement et de manière compacte, l'amplitude de diffusion et la section efficace de diffusion. Enfin, Umeki *et al.* [UL97] ont utilisé les ondes partielles pour modéliser des ondes spirales lors de l'interaction entre une onde sonore et un écoulement.

L'application de la méthode des ondes partielles pour des problèmes de diffusion du son résulte d'une collaboration avec Christophe Coste.

Nous suivrons ici un formalisme analogue à celui utilisé par Coste *et al.* [CLU99] dans le cas de l'interaction d'ondes de surface non dispersives avec un tourbillon en eau peu profonde. En effet, les hypothèses et les équations sont analogues à celles de l'interaction son-écoulement, la pression acoustique étant remplacée par la perturbation du niveau moyen de la surface. Comme nous l'avons déjà remarqué au paragraphe 1.6 du chapitre I, il existe une analogie très forte entre la propagation des ondes sonores et celle des ondes de surface en eau peu profonde [LL89b] (paragraphe 12).

2.2 Présentation de la méthode

La méthode des ondes partielles a été largement utilisée en  lectromagn tisme [Jac75] (chapitre 16) et en mécanique quantique [Tay72] (chapitre 11) afin d'étudier les problèmes de diffusion. Il s'agit d'une méthode adaptée aux potentiels à symétrie sphérique ou cylindrique. Elle consiste à développer la quantité recherch e (champ électromagnétique,

fonction d'onde Ψ en mécanique quantique, pression p_s en acoustique) en modes selon les angles θ et φ . À trois dimensions, le développement s'effectue en introduisant les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$.

Nous nous restreindrons ici à des problèmes bidimensionnels. Dans ce cas, le développement se réduit à une transformation de Fourier discrète selon l'angle polaire θ :

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi_n(r) e^{in\theta}, \quad (2.1)$$

les fonctions $\Psi_n(r)$ étant appelées ondes partielles.

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique, ce type de développement est particulièrement efficace car il permet de ramener le problème général à la résolution d'une équation différentielle à une seule variable portant sur chacune des ondes partielles $\Psi_n(r)$.

2.3 Expression des ondes partielles

Le point de départ du développement en ondes partielles est l'équation d'Obukhov [Obu41] qui régit l'évolution de la masse volumique ρ_s d'une onde sonore se propageant dans un écoulement moyen $\vec{v}_0(\vec{r})$ de masse volumique moyenne ρ_0 :

$$\left[\frac{D^2}{Dt^2} - c_0^2 \Delta \right] \rho_s = 0 \quad (2.2)$$

où $\frac{D}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$.

Nous l'avons déduite au paragraphe 1.6 du chapitre I à partir des équations linéarisées de la dynamique des fluides avec les hypothèses d'un écoulement « gelé » de nombre de Mach $\mathcal{M} = v_0/c_0 \ll 1$ et dans le cadre de l'acoustique géométrique, en introduisant le paramètre $\beta = kL_m = 2\pi L_m/\lambda \gg 1$ où L_m est la taille maximale de l'écoulement considéré.

Lorsque l'écoulement est axisymétrique, son champ de vitesse est orthoradial et ne dépend que du rayon r :

$$\vec{v}_0(\vec{r}) = U(r) \hat{\theta} \quad (2.3)$$

et l'opérateur D/Dt s'exprime sous la forme

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{U(r)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.4)$$

L'équation (2.2) se met alors sous la forme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{U(r)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \right] \rho_s = 0. \quad (2.5)$$

Nous supposons dans la suite que l'onde sonore est monochromatique à la pulsation ν :

$$\rho_s(\vec{r}, t) = \Re \left[\tilde{\rho}_s(\vec{r}) e^{-i\nu t} \right]. \quad (2.6)$$

De plus, la forme de l'équation (2.5) suggère d'effectuer un développement en ondes partielles $\rho_n(r)$ (transformée de Fourier angulaire) :

$$\frac{\rho_s(\vec{r}, t)}{\rho_{s0}} = \Re \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n(r) e^{i(n\theta)} \right) e^{-i\nu t} \right] = \Re \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n(r) e^{i(n\theta - \nu t)} \right]. \quad (2.7)$$

L'équation (2.5) s'écrit alors sous la forme

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[\left(k - \frac{n U(r)}{c_0 r} \right)^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] \rho_n = 0 \quad (2.8)$$

pour chaque mode de Fourier ρ_n , avec $k = \nu/c_0$, le ' désignant la dérivation par rapport à r . Le nombre de Mach \mathcal{M} de l'écoulement étant supposé petit,

$$\frac{n^2 U^2}{c_0^2 r^2} / \frac{n^2}{r^2} = \mathcal{M}^2 \ll 1 \quad (2.9)$$

et on arrive alors à la relation

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[k^2 - 2 \frac{n k U(r)}{c_0 r} - \frac{n^2}{r^2} \right] \rho_n = 0. \quad (2.10)$$

Le problème est considérablement simplifié : pour un écoulement axisymétrique $U(r)$ donné, il s'agit de résoudre, par chaque onde partielle $\rho_n(r)$, l'équation différentielle (2.10), la masse volumique de l'onde sonore $\rho_s(\vec{r}, t)$ étant reconstruite en utilisant la relation (2.7).

2.4 Limitations de la résolution

Nous avons déjà vu que la résolution des relations (2.10) était valide que pour de faibles nombres de Mach $\mathcal{M} \ll 1$ et pour de petites longueurs d'ondes $\beta \gg 1$.

Une autre « limitation », purement technique celle-ci, apparaît en examinant l'équation (2.10). en effet, elle ne possède des solutions simples que dans les cas $U \propto r$ ou $U \propto 1/r$: il s'agit alors d'une équation de Bessel dont la solution est une combinaison linéaire de fonctions de Bessel. Afin de rester assez général, nous supposons dans la suite que l'écoulement, bidimensionnel, peut être modélisé par :

$$U(r) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \gamma_i \left(\frac{r}{L_m} \right)^i \quad r \leq L_m \quad (2.11.a)$$

$$U(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad r \geq L_m, \quad (2.11.b)$$

la circulation Γ de cet écoulement s'exprimant :

$$\Gamma = 2\pi L_m \sum_{i=0}^{i_{max}} \gamma_i, \quad (2.12)$$

et sa vorticité, non nulle uniquement pour $r \leq L_m$, ayant pour expression :

$$\Omega = \frac{2\gamma_1}{L_m} + \sum_{i=2}^{i_{max}-1} \frac{(i+2)}{L_m} \gamma_i \left(\frac{r}{L_m}\right)^i \quad r \leq L_m. \quad (2.13)$$

en utilisant la relation

$$\Omega(r) \hat{z} = \overrightarrow{\text{rot}} [v(r) \hat{\theta}] \implies \Omega(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v)}{\partial r} \quad (2.14)$$

en coordonnées cylindriques.

γ_1 est ainsi relié à la valeur de la vorticité au centre du vortex par la relation

$$\gamma_1 = \frac{\Omega(r=0) L_m}{2} = \frac{\Omega_0 L_m}{2} \neq 0 \quad \text{en général} \quad (2.15)$$

et la vitesse est nulle en $r = 0$.

Cette modélisation à l'aide de polynômes permet d'étudier les problèmes de diffusion pour une grande variété d'écoulements, avec ou sans circulation Γ , selon le choix des coefficients γ_i .

2.5 Solution extérieure à l'écoulement

Pour $r \geq L$, il s'agit de résoudre la relation (2.10) avec le champ de vitesse (2.11.b) :

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[k^2 - \frac{n k \Gamma}{\pi c_0 r^2} - \frac{n^2}{r^2} \right] \rho_n = 0. \quad (2.16)$$

En posant, par analogie avec la définition (II.11) du paramètre de dislocation α

$$\alpha = \frac{k \Gamma}{2\pi c_0} = \frac{\nu \Gamma}{2\pi c_0^2} \quad \text{et} \quad m = \sqrt{n^2 + 2 n \alpha}, \quad (2.17)$$

on arrive à :

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] \rho_n = 0 \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) est une équation de Bessel dont la solution peut s'écrire sous la forme

$$\rho_n(r) = b_n \frac{J_m(kr)}{J_m(\beta)} + c_n \frac{H_m^1(kr)}{H_m^1(\beta)} \quad (2.19)$$

où b_n et c_n sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites. Nous avons choisi d'introduire dans la combinaison linéaire (2.19) les fonctions de Hankel de première espèce car elles modélisent bien des ondes se propageant à l'extérieur du vortex (voir l'annexe 3.D du chapitre I).

Remarque : $m = \sqrt{n^2 + 2n\alpha}$ peut prendre des valeurs complexes pour de petites valeurs de n , si $\alpha > 1/2$.

2.6 Solution intérieure à l'écoulement

Pour $r \leq L$, la situation est plus compliquée de par la forme (2.11.a) de l'écoulement que nous avons choisi. En effet, l'équation à résoudre s'écrit

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[k^2 - \frac{2n}{c_0} \frac{k}{r} \sum_{i=1}^{i_{max}} \gamma_i \left(\frac{r}{L_m} \right)^i - \frac{n^2}{r^2} \right] \rho_n = 0. \quad (2.20)$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[k \left(k - \frac{n \Omega_0}{c_0} \right) - \frac{2n}{c_0} \frac{k}{r} \sum_{i=2}^{i_{max}} \gamma_i \left(\frac{r}{L_m} \right)^i - \frac{n^2}{r^2} \right] \rho_n = 0. \quad (2.21)$$

en utilisant la relation (2.15). En posant

$$k_n = k - \frac{n \Omega_0}{c_0}, \quad (2.22)$$

il nous faut donc résoudre

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[k k_n - \frac{2n}{c_0} \frac{k}{r} \sum_{i=2}^{i_{max}} \gamma_i \left(\frac{r}{L_m} \right)^i - \frac{n^2}{r^2} \right] \rho_n = 0. \quad (2.23)$$

Nous avons alors développé chaque mode ρ_n sous la forme d'une série entière

$$\rho_n = a_n \sum_{p=0}^{\infty} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^p \quad (2.24)$$

Cette forme de solution n'étant utilisée que pour $r \leq L_m$, il est raisonnable de supposer que le série entière converge sur ce domaine.

Remarque : Nous n'avons choisi que des puissances positives de r car ρ_n doit rester fini en $r = 0$.

En utilisant ce développement en série entière dans l'équation (2.23), on peut montrer (voir l'annexe II.A) que

$$\begin{cases} \kappa_p^n &= 0 & \text{pour } p < |n| \\ \kappa_n^{|n|} &= 1 & \text{pour } p = |n| \\ \kappa_p^n &= f(\gamma_1, \dots, \gamma_{p_{max}}, L_m, k) & \text{pour } p > |n| \end{cases} \quad (2.25)$$

Ainsi, la solution intérieure est parfaitement déterminée à l'aide de la série entière (2.24), à une constante près a_n dont la valeur est fixée par les conditions aux limites.

2.7 Conditions aux limites

Physiquement, ρ_s et \vec{v}_s sont continus en $r = L_m$. La condition de continuité de la vitesse se traduit par la continuité de $\overrightarrow{\text{grad}} \rho_s$ en $r = L_m$, à l'aide de la relation (1.45.b) du chapitre I

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}_s}{Dt} + \rho_0 (\vec{v}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_0 + \rho_s (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_0 = -c^2 \overrightarrow{\text{grad}} \rho_s \quad (2.26)$$

puisque v_0 , ρ_s et c sont continus en $r = L_m$

Cela revient à considérer, pour chaque onde partielle, que ρ_n et ρ'_n sont continus en $r = L_m$ car

$$\overrightarrow{\text{grad}} \rho_n = \rho'_n \hat{r} + (in/r) \rho_n \hat{\theta}. \quad (2.27)$$

On obtient ainsi les deux relations

$$\begin{aligned} a_n \left(\sum_{p=|n|}^{\infty} \kappa_p^n \right) &= b_n + c_n \\ a_n \left(\sum_{p=|n|}^{\infty} \frac{p}{L_m} \kappa_p^n \right) &= k \left[b_n \frac{J'_m(\beta)}{J_m(\beta)} + c_n \frac{H_m^{1'}(\beta)}{H_m^1(\beta)} \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

La troisième condition provient de la solution du problème à l'infini. L'onde sonore doit être asymptotiquement ($kr \rightarrow \infty$) la somme d'une onde diffusée et d'une onde disloquée, ce qui conduit à la relation (voir l'annexe II.B)

$$b_n = (-i)^m J_m(\beta). \quad (2.29)$$

Ainsi, en utilisant la relation fonctionnelle [GR94] (relation 8.472)

$$z Z'_\nu(z) = z Z_{\nu-1}(z) - \nu Z_\nu(z) \quad (2.30)$$

valable pour toute fonction de Bessel Z_ν , les coefficients a_n , b_n et c_n s'expriment :

$$\begin{cases} a_n &= \frac{(-i)^m J_m(\beta)}{\Delta_n} \left[\frac{J_{m-1}(\beta)}{J_m(\beta)} - \frac{H_{m-1}^1(\beta)}{H_m^1(\beta)} \right] \\ b_n &= (-i)^m J_m(\beta) \\ c_n &= a_n \left(\sum_{p=|n|}^{\infty} \kappa_p^n \right) - b_n \end{cases} \quad (2.31)$$

où on a posé

$$\Delta_n = \sum_{p=|n|}^{\infty} \kappa_p^n \left(\frac{p+m}{\beta} - \frac{H_{m-1}^1(\beta)}{H_m^1(\beta)} \right). \quad (2.32)$$

La solution ρ_s s'exprime alors selon

$$\frac{\rho_s(r, \theta, t)}{\rho_{s0}} = \Re \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\sum_{p=|n|}^{\infty} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^p \right) e^{i(n\theta - \nu t)} \right] \quad r \leq L_m \quad (2.33.a)$$

$$\frac{\rho_s(r, \theta, t)}{\rho_{s0}} = \Re \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(b_n \frac{J_m(kr)}{J_m(\beta)} + c_n \frac{H_m^1(kr)}{H_m^1(\beta)} \right) e^{i(n\theta - \nu t)} \right] \quad r \geq L_m, (2.33.b)$$

les coefficients a_n , b_n et c_n étant déterminés par la relation (2.31).

Dans la limite $\alpha \rightarrow 0$, ce problème est analogue à celui de la diffusion d'une onde sonore par un cylindre immobile et impénétrable ([MI86], chapitre 8). On retrouve bien la même structure pour le champ sonore extérieur, mais le coefficient c_n prend ici une expression différente à cause des conditions aux limites sur le tourbillon.

Il est important de rappeler les hypothèses de validité de cette solution : écoulement polynomial de $\mathcal{M} \ll 1$ et $\beta = k L_m \gg 1$. Cette dernière hypothèse est en fait beaucoup moins restrictive que l'hypothèse usuelle de l'acoustique géométrique $\lambda \ll L$. En effet, L_m représente ici la taille réelle de l'écoulement, tandis que L n'est que la taille caractéristique du tourbillon. Nous verrons dans la suite que cette différence permet d'appliquer la méthode des ondes partielles même dans des cas où $\lambda \simeq L$ car $L_m \geq L$ dans la plupart des écoulements considérés.

Nous allons maintenant présenter quelques exemples d'écoulements pour lesquels nous avons appliqué la méthode des ondes partielles. En pratique, on ne peut effectuer les sommations des ondes partielles et de la série entière sur un nombre infini de termes. Ainsi, nous poserons dans la suite $2n_{max} + 1$ le nombre d'ondes partielles calculées ($-n_{max} \leq n \leq n_{max}$) : plus β est grand et plus $k r$ est grand, plus le nombre de modes n_{max} à prendre en compte est important.

De même, nous poserons p_{max} le nombre de termes pris en compte dans la série entière ($|n| \leq p \leq |n| + p_{max}$ pour chaque mode). Plus le polynôme (2.11) modélisant l'écoulement est d'ordre élevé, et plus β est grand, plus il faut prendre en compte un nombre important de termes dans la série entière.

Ces exigences sont deux nouvelles limitations (purement pratiques) de la méthode que nous proposons. En effet, il faut, pour chaque écoulement et chaque longueur d'onde choisie (qui correspond à une valeur de β donnée), trouver un compromis entre le nombre d'ondes partielles et de termes de la série entière à prendre en compte et l'inévitable altération de la précision numérique des évaluations des fonctions de Bessel et des sommations.

3. Exemples

3.1 Tourbillon en rotation solide

Nous reprenons dans ce paragraphe l'écoulement en rotation solide du paragraphe 2.2 du chapitre I. L'intérêt de ce calcul est de vérifier que l'on retrouve bien, avec un développement en série entière de la forme (2.11.a), le résultat de Coste *et al.* [CLU99] pour le même type d'écoulement.

La vitesse \vec{v} de ce tourbillon est :

$$\begin{cases} v_\theta(r) &= \Omega_0 r/2 & r \leq L_m \\ v_\theta(r) &= \frac{\Gamma}{2\pi r} & r \geq L_m, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec une circulation $\Gamma = \pi\Omega_0 L_m^2$.

Pour $r \leq L_m$, l'équation (2.5) s'écrit, sans aucune approximation :

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[K_n^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] \rho_n = 0. \quad (3.2)$$

où

$$K_n = \left| k - \frac{n\Omega_0}{2c_0} \right| \quad (3.3)$$

En introduisant le développement (2.11.a) et en utilisant la propriété (2.25) des coefficients κ , la relation (3.2) s'écrit alors, :

$$\begin{aligned} \sum_{p=|n|+2}^{\infty} \frac{p(p-1)}{L_m^2} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{p-2} + \sum_{p=|n|+1}^{\infty} \frac{p}{L_m^2} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{p-2} \\ + \left[K_n^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] \sum_{p=|n|}^{\infty} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^p = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1.1 Cas $K_n = 0$

Cette situation correspond, d'après (2.22), à $n_0 = k c_0 / \Omega_0$. L'équation (3.4) se réduit alors à

$$\sum_{p=|n|+2}^{\infty} p(p-1) \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m}\right)^{p-2} + \sum_{p=|n|+1}^{\infty} p \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m}\right)^{p-2} - n^2 \sum_{p=|n|}^{\infty} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m}\right)^{p-2} = 0. \quad (3.5)$$

En identifiant terme à terme, on arrive à :

$$\begin{aligned} p = |n| &\longrightarrow -n^2 \kappa_{|n|}^n = 0 \\ &\hookrightarrow \kappa_0^0 \neq 0 \text{ et } \kappa_0^{n \neq 0} = 0 \\ p = |n| + 1 &\longrightarrow (|n| + 1 - n^2) \kappa_{|n|+1}^n = 0 \\ &\hookrightarrow \kappa_{|n|+1}^{\pm \sqrt{|n|+1}} \neq 0 \text{ et } \kappa_1^{|n| \neq \sqrt{|n|+1}} = 0 \\ p \geq |n| + 2 &\longrightarrow (p^2 - n^2) \kappa_p^n = 0 \\ &\hookrightarrow \kappa_{|n|}^n \neq 0 \text{ et } \kappa_p^{|n| \neq p} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\rho_n(r) = a_n \left(\frac{r}{L_m}\right)^{|n|} \quad (3.6)$$

ce qui correspond, pour la valeur particulière n_0 pour laquelle $K_n = 0$, à

$$\rho_{n_0}(r) = a_{n_0} \left(\frac{r}{L_m}\right)^{|n_0|} \quad (3.7)$$

3.1.2 Cas $K_n \neq 0$

Dans ce cas, il faut résoudre la relation (3.4) dans sa totalité. On peut l'écrire sous la forme plus compacte :

$$\sum_{p=|n|+2}^{\infty} [p(p-1) \kappa_p^n + L_m^2 K_n^2 \kappa_{p-2}^n] \left(\frac{r}{L_m}\right)^{p-2} + \sum_{p=|n|+1}^{\infty} p \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m}\right)^{p-2} - n^2 \sum_{p=|n|}^{\infty} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m}\right)^{p-2} = 0. \quad (3.8)$$

En identifiant terme à terme, on arrive à :

$$\begin{aligned}
 p = |n| &\longrightarrow -n^2 \kappa_{|n|}^n = 0 \\
 &\hookrightarrow \kappa_0^0 \neq 0 \text{ et } \kappa_0^{n \neq 0} = 0 \\
 p = |n| + 1 &\longrightarrow (|n| + 1 - n^2) \kappa_{|n|+1}^n = 0 \\
 &\hookrightarrow \kappa_{|n|+1}^{\pm \sqrt{|n|+1}} \neq 0 \text{ et } \kappa_1^{|n| \neq \sqrt{|n|+1}} = 0
 \end{aligned}$$

la relation générale de récurrence s'écrivant, pour $p \geq |n| + 2$,

$$(p^2 - n^2) \kappa_p^n + L_m^2 K_n^2 \kappa_{p-2}^n = 0 \quad (3.9)$$

d'où l'on déduit

$$\begin{cases} \kappa_{|n|}^n \neq 0 \\ \kappa_p^n = \frac{-L_m^2 K_n^2}{p^2 - n^2} \kappa_{p-2}^n \quad \text{pour } p \neq |n| \end{cases} \quad (3.10)$$

On peut alors conclure que

$$\begin{cases} \kappa_{|n|+2}^n = \frac{-L_m^2 K_n^2}{(|n|+2)^2 - n^2} \kappa_{|n|}^n \neq 0 \implies \kappa_{|n|+2q}^n \neq 0 \\ \kappa_{|n|+1}^n = \frac{-L_m^2 K_n^2}{(|n|+1)^2 - n^2} \kappa_{|n|-1}^n = 0 \implies \kappa_{|n|+2q+1}^n = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

La solution s'écrit alors sous la forme :

$$\rho_n(r) = a'_n \kappa_{|n|}^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{|n|} \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \kappa_{|n|+2q}^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{2q} \right\} \quad (3.12)$$

$$= a'_n \kappa_{|n|}^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{|n|} \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q (K_n r)^{2q} |n|!}{2^{2q} q! (q + |n|)!} \right\} \quad (3.13)$$

$$= a'_n \kappa_{|n|}^n |n|! \left(\frac{r}{L_m} \right)^{|n|} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (K_n r)^{2q}}{2^{2q} q! \Gamma(q + |n| + 1)} \quad (3.14)$$

où la fonction $\Gamma(n)$ est définie par

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma(n+1) = n!. \quad (3.15)$$

Or, la fonction de Bessel d'ordre n peut s'écrire sous la forme [GR94] (relation 8.402)

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^n} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q z^{2q}}{2^{2q} q! \Gamma(n+q+1)}. \quad (3.16)$$

En comparant cette expression avec (3.14), on en déduit

$$\rho_n(r) = \frac{2^{|n|} |n|!}{(K_n)^n} a'_n \kappa_{|n|}^n J_{|n|}(K_n r) = a_n J_{|n|}(K_n r) \quad (3.17)$$

3.1.3 Conclusion

Pour $r \leq L_m$, la solution générale s'écrit, d'après les relations (3.7) et (3.17),

$$\frac{\rho_s(r, \theta, t)}{\rho_{s0}} = \Re \left[\left\{ \sum_{n \neq n_0} a_n J_{|n|}(K_n r) e^{i(n\theta - \nu t)} \right\} + a_{n_0} \left(\frac{r}{L_m} \right)^{|n_0|} e^{i(n_0\theta - \nu t)} \right]. \quad (3.18)$$

On retrouve l'expression obtenue par Coste *et al.* [CLU99] dans le cadre de la diffusion d'ondes de surface par un tourbillon en rotation solide.

Nous allons maintenant appliquer cette méthode à deux autres types de tourbillons axisymétriques : l'un à circulation non nulle et l'autre à circulation nulle.

3.2 Tourbillon à circulation non nulle

Nous allons dans ce paragraphe étudier l'interaction entre une onde sonore et un vortex polynomial à circulation non nulle. Le tourbillon le plus simple auquel on puisse penser à deux dimensions a une vorticité de la forme :

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 \left(1 - \frac{3r^2}{L_m^2} + \frac{2r^3}{L_m^3} \right) & r \leq L_m \\ \Omega &= 0 & r \geq L_m. \end{aligned} \quad (3.19)$$

En utilisant la relation (2.14), on en déduit la vitesse de cet écoulement

$$U(r) = \frac{\Omega_0 r}{2} \left(1 - \frac{3r^2}{2L_m^2} + \frac{4r^3}{5L_m^3} \right) \quad r \leq L_m \quad (3.20.a)$$

$$U(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad r \geq L_m, \quad (3.20.b)$$

où la circulation Γ a pour expression

$$\Gamma = \frac{3\pi \Omega_0 L_m^2}{10}. \quad (3.21)$$

L'allure de la vitesse et de la vorticité de cet écoulement sont présentées sur la figure II.2.

À l'extérieur, la solution est identique à (2.33.b), avec, d'après (2.17)

$$\alpha = \frac{\nu \Gamma}{2\pi c_0^2} \quad \text{et} \quad m = \sqrt{n^2 + 2n\alpha}. \quad (3.22)$$

À l'intérieur, la solution sera de la forme (2.33.a), mais l'on peut ici préciser la forme des coefficients κ_p^n du développement. En effet, la relation (2.23) s'écrit

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[k k_n - n \left(A_\Omega r^2 + B_\Omega r^3 \right) \right] \rho_n = 0. \quad (3.23)$$

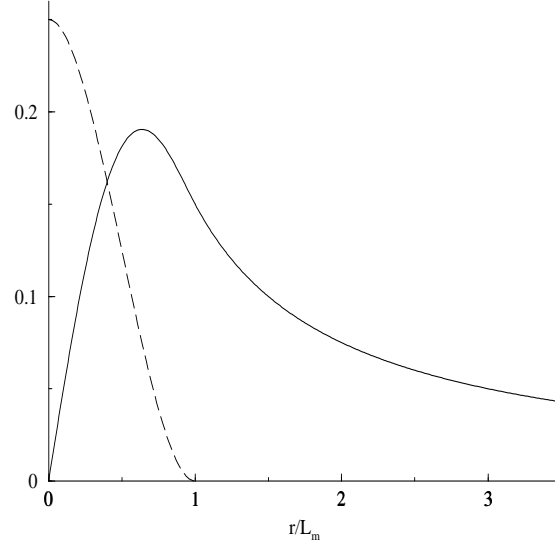


FIG. II.2 – Vitesse $U(r)$ (—) et vorticité $\Omega(r)/4$ (---) de l'écoulement polynomial (3.20) en fonction de r/L_m .

où

$$A_\Omega = \frac{-3\Omega_0 k}{2c L_m^2} \quad \text{et} \quad B_\Omega = \frac{4\Omega_0 k}{5c L_m^3}. \quad (3.24)$$

On peut alors déterminer les κ_p^n en identifiant terme à terme les puissances de (3.23), comme nous l'avons déjà fait au paragraphe (3.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{|n|}^n = 1 \\ \kappa_{|n|+1}^n = 0 \\ \kappa_{|n|+2}^n = \frac{-L_m^2 k k_n}{(|n|+2)^2 - n^2} \\ \kappa_{|n|+3}^n = 0 \\ \kappa_{|n|+4}^n = \frac{-L_m^2}{(|n|+4)^2 - n^2} [k k_n \kappa_{|n|+2}^n - n A_\Omega L_m^2] \\ \kappa_{|n|+p}^n = \frac{-L_m^2}{p^2 - n^2} [k k_n \kappa_{p-2}^n - n (A_\Omega L_m^2 \kappa_{p-4}^n + B_\Omega L_m^3 \kappa_{p-5}^n)] \quad p \geq 5. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

L'onde sonore totale traduisant l'interaction son-écoulement pour le champ de vitesse (3.20) s'écrit donc sous la forme

$$\frac{\rho_s(r, \theta, t)}{\rho_{s0}} = \Re \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\sum_{p=|n|}^{\infty} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^p \right) e^{i(n\theta - \nu t)} \right] \quad r \leq L_m \quad (3.26.a)$$

$$\frac{\rho_s(r, \theta, t)}{\rho_{s0}} = \Re \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(b_n \frac{J_m(kr)}{J_m(\beta)} + c_n \frac{H_m^1(kr)}{H_m^1(\beta)} \right) e^{i(n\theta - \nu t)} \right] \quad r \geq L_m, \quad (3.26.b)$$

les κ_p^n étant déterminés par les relations de récurrence (3.25) et les coefficients a_n , b_n et c_n par la relation (2.31).

Nous présentons plusieurs exemples d'interaction entre ce tourbillon et une onde sonore, pour un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 3.9 \cdot 10^{-2}$ et avec $L_m \simeq 0.015 m$, ce qui implique que la vitesse de l'écoulement est maximale pour $r = 0.01 m$. Chaque calcul a été effectué sur un domaine de taille $0.4 m \times 0.4 m$, ce qui correspond environ à un domaine carré de taille $26L_m$ environ. Pour chaque longueur d'onde

- la figure II.3 pour $\lambda = L_m$, d'où $\beta \simeq 6.6$ ($n_{max} = 500$ et $p_{max} = 1000$) ;
- la figure II.4 pour $\lambda = 2L_m/3$, d'où $\beta \simeq 9.8$ ($n_{max} = 500$ et $p_{max} = 1000$) ;
- la figure II.5 pour $\lambda = L_m/2$, d'où $\beta \simeq 13.1$ ($n_{max} = 500$ et $p_{max} = 1000$),

nous présentons l'onde sonore « totale » ρ_s calculée à partir des expressions (3.26), avec $\rho_{s0} = 1$. On constate, avec ces trois choix de rapport λ/L_m , que la diffusion est d'autant plus efficace (amplitude de l'onde diffusée plus importante) que la longueur d'onde diminue. Par contre, la longueur d'onde ne semble pas avoir, dans cette gamme de paramètres, d'effet sensible sur la directivité de la diffusion du son par le tourbillon.

Nous reviendrons plus en détails sur ces différents phénomènes et leur interprétation dans le chapitre V.

3.3 Tourbillon à circulation nulle

Dans ce paragraphe, nous allons considérer un écoulement tourbillonnaire à circulation nulle, modélisé à l'aide d'un polynôme. En partant du tourbillon à circulation non nulle (3.19) et (3.20) que nous avons étudié au paragraphe précédent, nous pouvons le modifier en ajoutant une couronne de vorticité négative pour $L_1 \leq r \leq L_m$ (voir aussi le paragraphe 1.2.2 du chapitre IV).

La distribution la plus simple est de la forme

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 \left(1 - \frac{r^2}{L_1^2} \right) \left(1 - \frac{3r^2}{L_m^2} + \frac{2r^3}{L_m^3} \right) & r \leq L_m \\ \Omega &= 0 & r \geq L_m. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le fait d'imposer une circulation nulle donne une relation entre L_1 et L_m :

$$\iint \Omega r dr d\theta = \Gamma = 0 \quad \implies \quad L_m = \sqrt{4.2} L_1. \quad (3.28)$$

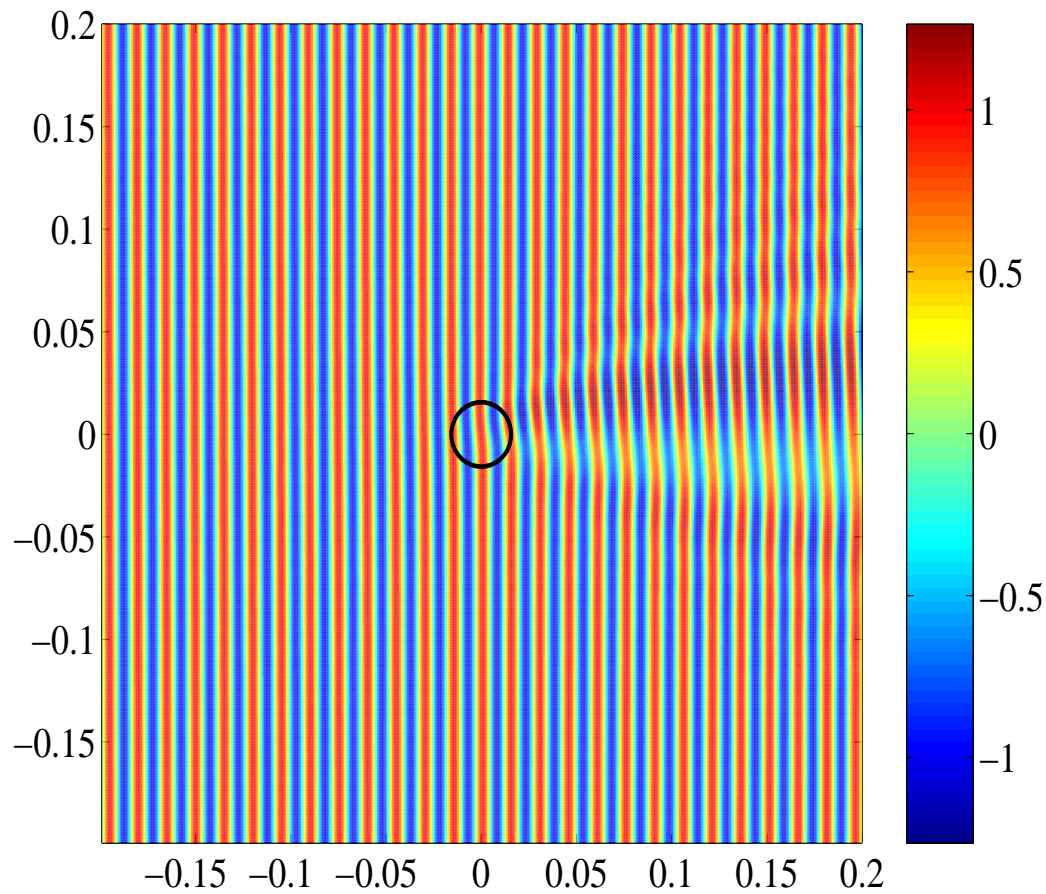


FIG. II.3 – *Onde sonore totale issue de l'interaction son-écoulement pour le tourbillon à circulation non nulle (3.19) : $\mathcal{M} \simeq 0.039$ et $\lambda/L_m = 1$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.*

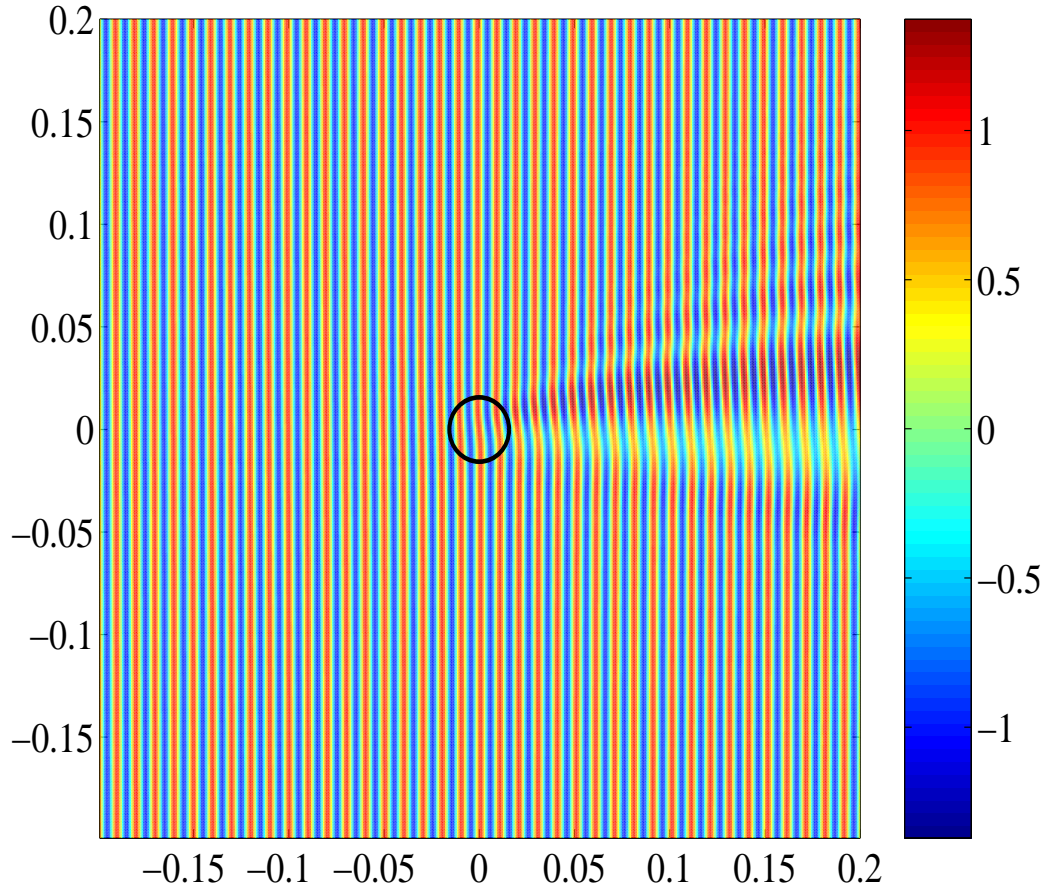


FIG. II.4 – *Onde sonore totale issue de l'interaction son-écoulement pour un tourbillon à circulation non nulle (3.19) : $\mathcal{M} \simeq 0.039$ et $\lambda/L_m = 2/3$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.*

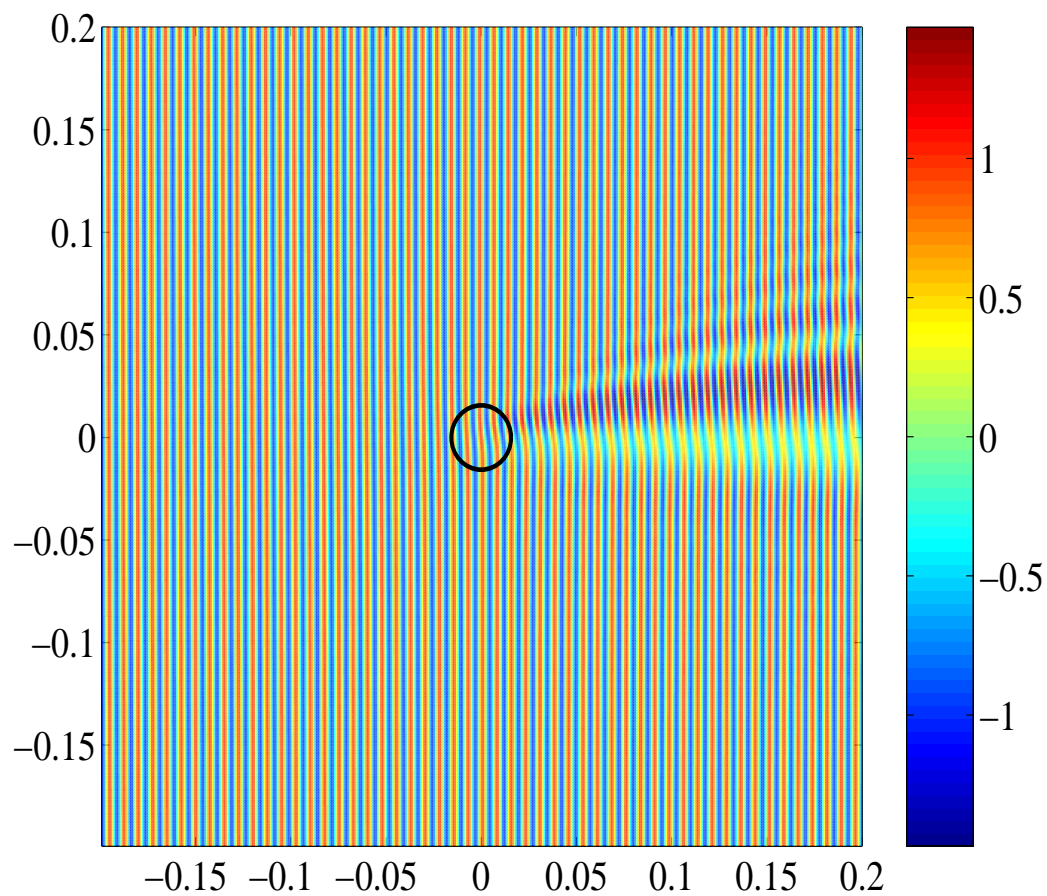


FIG. II.5 – *Onde sonore totale issue de l'interaction son-écoulement pour un tourbillon à circulation non nulle (3.19) : $\mathcal{M} \simeq 0.039$ et $\lambda/L_m = 1/2$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.*

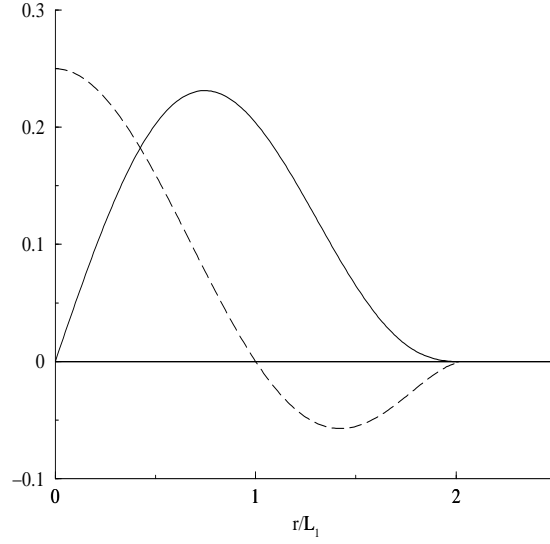


FIG. II.6 – Vitesse $U(r)$ (—) et vorticité $\Omega(r)/4$ (---) de l'écoulement polynomial (3.29) en fonction de r/L_1 .

En utilisant la relation (2.14), on en déduit la vitesse de cet écoulement

$$U(r) = \frac{\Omega_0 r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{2} \left[\frac{3}{L_m^2} + \frac{1}{L_1^2} \right] + \frac{4r^3}{5L_m^3} + \frac{r^4}{L_1^2 L_m^2} - \frac{4r^5}{7L_1^2 L_m^3} \right) \quad r \leq L_m \quad (3.29.a)$$

$$U(r) = 0 \quad r \geq L_m, \quad (3.29.b)$$

L'allure de la vitesse et de la vorticité de cet écoulement sont présentées sur la figure II.6.

À l'extérieur, la solution est indentique à (2.33.b), avec, d'après (2.17)

$$\alpha = \frac{\nu \Gamma}{2\pi c_0^2} = 0 \quad \text{et} \quad m = \sqrt{n^2} = |n|. \quad (3.30)$$

puisque la vitesse de l'écoulement est nulle d'après (3.29.b).

À l'intérieur, la solution est de la forme (2.33.a), mais l'on peut ici aussi préciser la forme des coefficients κ_p^n du développement. En effet, la relation (2.23) s'écrit

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[k k_n - n \left(A_\Omega r^2 + B_\Omega r^3 + D_\Omega r^4 + E_\Omega r^5 \right) \right] \rho_n = 0. \quad (3.31)$$

où

$$\begin{cases} A_\Omega &= \frac{-\Omega_0 k}{2c} \left[\frac{3}{L_m^2} + \frac{1}{L_1^2} \right] \\ B_\Omega &= \frac{4\Omega_0 k}{5c L_m^3} \\ D_\Omega &= \frac{\Omega_0 k}{c L_1^2 L_m^2} \\ E_\Omega &= \frac{-4\Omega_0 k}{7c L_1^2 L_m^3}. \end{cases} \quad (3.32)$$

On peut alors déterminer les κ_p^n en identifiant terme à terme les puissances de (3.31) :

$$\begin{cases} \kappa_{|n|}^n &= 1 \\ \kappa_{|n|+1}^n &= 0 \\ \kappa_{|n|+2}^n &= \frac{-L_m^2 k k_n}{(|n|+2)^2 - n^2} \\ \kappa_{|n|+3}^n &= 0 \\ \kappa_{|n|+4}^n &= \frac{-L_m^2}{(|n|+4)^2 - n^2} [k k_n \kappa_{|n|+2}^n - n A_\Omega L_m^2] \\ \kappa_{|n|+5}^n &= \frac{L_m^2}{(|n|+5)^2 - n^2} [n B_\Omega L_m^3] \\ \kappa_{|n|+6}^n &= \frac{-L_m^2}{(|n|+6)^2 - n^2} [k k_n \kappa_{|n|+4}^n - n (A_\Omega L_m^2 \kappa_{|n|+2}^n + D_\Omega L_m^4)] \\ \kappa_{|n|+p}^n &= \frac{L_m^2}{p^2 - n^2} [k k_n \kappa_{p-2}^n - n (A_\Omega L_m^2 \kappa_{p-4}^n + B_\Omega L_m^3 \kappa_{p-5}^n + \\ &\quad D_\Omega L_m^4 \kappa_{p-6}^n + E_\Omega L_m^5 \kappa_{p-7}^n)] \quad p \geq 7. \end{cases} \quad (3.33)$$

L'onde sonore totale traduisant l'interaction son-écoulement pour le champ de vitesse (3.29) s'écrit donc sous la forme

$$\frac{\rho_s(r, \theta, t)}{\rho_{s0}} = \Re \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\sum_{p=|n|}^{\infty} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^p \right) e^{i(n\theta - \nu t)} \right] \quad r \leq L_m \quad (3.34.a)$$

$$\frac{\rho_s(r, \theta, t)}{\rho_{s0}} = \Re \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(b_n \frac{J_{|n|}(kr)}{J_{|n|}(\beta)} + c_n \frac{H_{|n|}^1(kr)}{H_{|n|}^1(\beta)} \right) e^{i(n\theta - \nu t)} \right] \quad r \geq L_m, \quad (3.34.b)$$

les κ_p^n étant déterminés par les relations de récurrence (3.33) et les coefficients a_n , b_n et c_n par la relation (2.31).

Nous présentons trois exemples d'interaction entre ce tourbillon et une onde sonore, pour un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.153$, $L_1 = 0.01 \sqrt{2}$ et avec $L_m \simeq 0.029 m$. Chaque calcul

a été effectué sur un domaine de taille $0.4\,m \times 0.4\,m$, ce qui correspond environ à un domaine carré de taille $14L_m$ environ. Pour chaque longueur d'onde

- les figures II.7 et II.8 pour $\lambda = 0.02\,m \simeq 2L_m/3$, d'où $\beta \simeq 9.1$ ($n_{max} = 1000$ et $p_{max} = 2000$);
- les figures II.9 et II.10 pour $\lambda = 0.01\,m \simeq L_m/3$, d'où $\beta \simeq 18.2$ ($n_{max} = 1000$ et $p_{max} = 2000$);

nous présentons l'onde sonore « totale » ρ_s calculée à partir des expressions (3.34), avec $\rho_{s0} = 1$ et l'onde sonore diffusée ρ_{diff} calculé à partir de la définition

$$\rho_{diff} = \rho_s - \rho_{inc} \quad (3.35)$$

où ρ_{inc} est l'onde sonore incidente, plane.

On constate, avec ces trois choix de rapports λ/L_m , que la diffusion est d'autant plus efficace (amplitude de l'onde diffusée plus importante) que la longueur d'onde diminue. De même, la directivité de la diffusion du son par le tourbillon augmente lorsque la longueur d'onde sonore diminue. Nous reviendrons plus en détail sur ces différents phénomènes et leur interprétation dans le chapitre IV.

La comparaison de l'amplitude de diffusion calculée analytiquement par la méthode des ondes partielles et déduite de la simulation numérique directe décrite au chapitre III (figures II.11 et II.12) montre un bon accord (malgré le faible échantillonnage angulaire numérique) entre les deux méthodes, même dans des cas où le paramètre β n'est pas très grand ($\lambda = 0.02\,m \implies \beta \simeq 9.1$).

Remarque : afin de comparer les amplitudes de diffusion, nous avons employé l'angle de diffusion, noté ici θ' tel que nous l'avons défini au paragraphe 3 du chapitre I: $\theta' = \theta - \pi$.

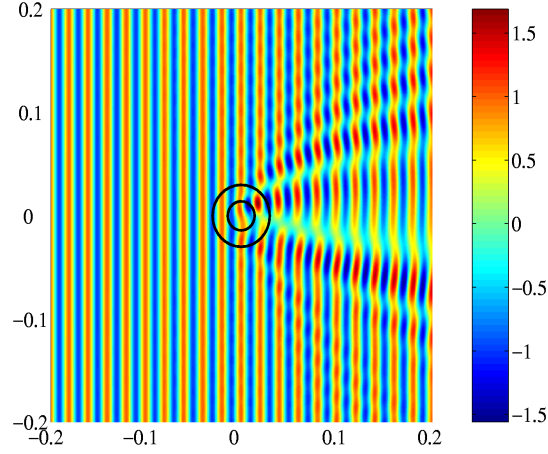


FIG. II.7 – *Onde sonore totale issue de l'interaction son-écoulement pour un tourbillon à circulation nulle (3.27) : $\mathcal{M} \simeq 0.153$ et $\lambda/L_m \simeq 2/3$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.*

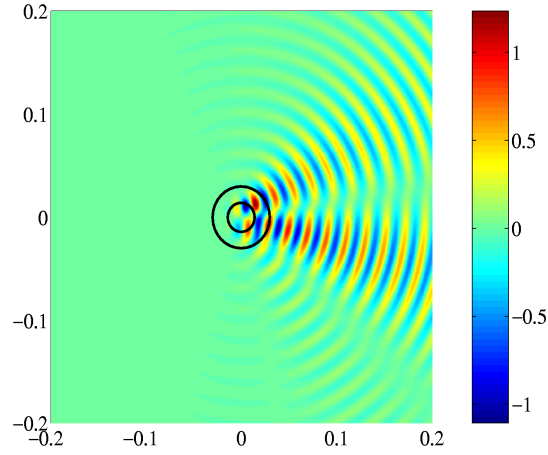


FIG. II.8 – *Onde sonore issue de l'interaction son-écoulement pour un tourbillon à circulation nulle (3.27), après soustraction d'une onde plane incidente : $\mathcal{M} \simeq 0.153$ et $\lambda/L_m \simeq 2/3$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.*

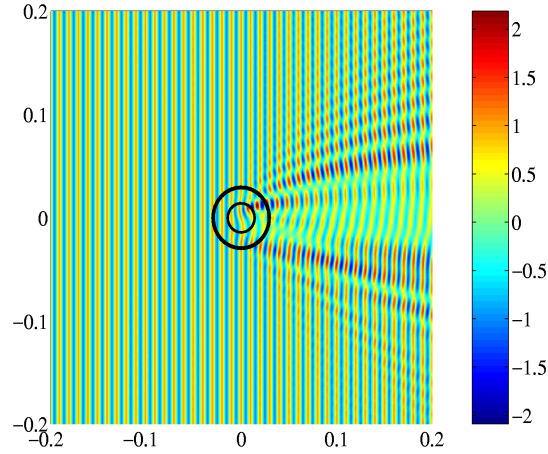


FIG. II.9 – Onde sonore totale issue de l'interaction son-écoulement pour un tourbillon à circulation nulle (3.27) : $\mathcal{M} \simeq 0.153$ et $\lambda/L_m \simeq 1/3$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

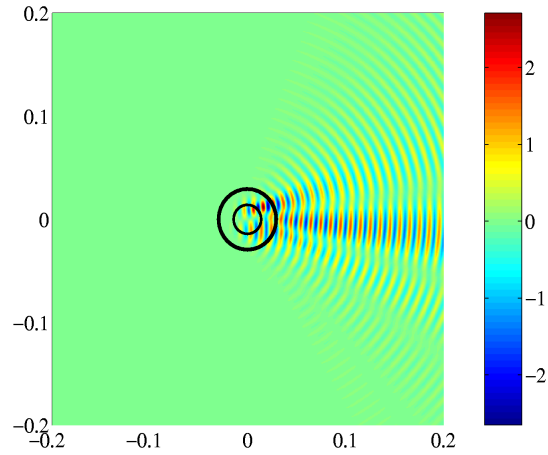


FIG. II.10 – Onde sonore issue de l'interaction son-écoulement pour un tourbillon à circulation nulle (3.27), après soustraction d'une onde plane incidente : $\mathcal{M} \simeq 0.153$ et $\lambda/L_m \simeq 1/3$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

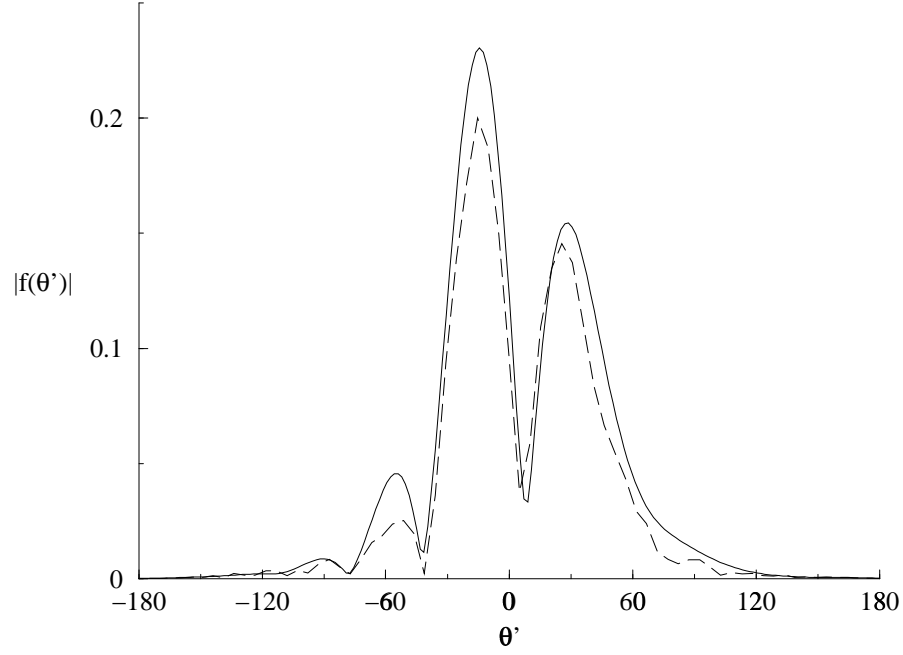


FIG. II.11 – Amplitude de diffusion $f(\theta' = \pi - \theta)$ en fonction de θ' (en degrés) pour l'écoulement à circulation nulle (3.27) : $\mathcal{M} \simeq 0.153$, $\lambda = 0.02 \text{ m}$ et $R = 0.2 \text{ m}$. (—) méthode des ondes partielles ($\beta = 9.1$), (---) simulation numérique.

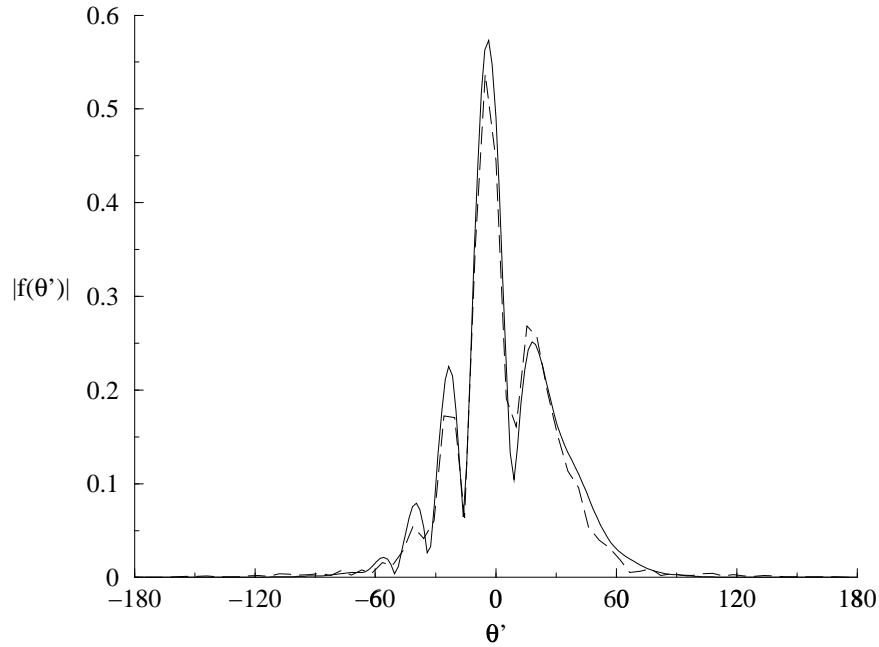


FIG. II.12 – Amplitude de diffusion $f(\theta' = \pi - \theta)$ en fonction de θ' (en degrés) pour l'écoulement à circulation nulle (3.27) : $\mathcal{M} \simeq 0.153$, $\lambda = 0.01 \text{ m}$ et $R = 0.2 \text{ m}$. (—) méthode des ondes partielles ($\beta = 18.2$), (---) simulation numérique.

4. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une nouvelle technique d'étude de l'interaction son-écoulement dans la limite de l'acoustique géométrique : la méthode des ondes partielles, qui est limitée à des écoulements à symétrie cylindrique, donne accès à la répartition spatiale de l'amplitude sonore en champ proche comme en champ lointain. Les restrictions sur le nombre de Mach et la longueur d'onde sont beaucoup moins drastiques que pour le tracé de rayons évoqué au paragraphe 2 du chapitre I. Comme nous avons pu le constater sur l'exemple du paragraphe 3.3, ces deux conditions ne sont pas trop restrictives en terme de nombre de Mach et de longueur d'onde, car la taille caractéristique de l'écoulement qui intervient ici est l'extension totale L_m de son champ de vorticité.

La méthode, basée sur le formalisme des ondes partielles, apparaît ainsi comme un complément très utile à une simulation numérique, afin d'étudier les interactions son-écoulement pour $\lambda \simeq L$, où L ($\neq L_m$ en général) est la taille caractéristique de l'écoulement.

Annexes

II.A Expression générale des κ_p^n

Reprenons l'équation (2.23) valable pour $r \leq L_m$:

$$\rho_n'' + \frac{\rho_n'}{r} + \left[k k_n - \frac{2n k}{c_0 r} \sum_{i=2}^{i_{max}} \gamma_i \left(\frac{r}{L_m} \right)^i - \frac{n^2}{r^2} \right] \rho_n = 0. \quad (\text{II.1})$$

Le développement en série entière (2.24) conduit à

$$\begin{aligned} \rho_n' &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{L_m} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{p-1} \\ \rho_n'' &= \sum_{p=2}^{\infty} \frac{p(p-1)}{L_m^2} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{p-2}. \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Pour n fixé, posons $p_0 \geq 0$ l'indice du premier terme non nulle de la série entière (2.24) :

$$\forall p < p_0, \kappa_p^n = 0 \quad \text{et} \quad \kappa_{p_0}^n \neq 0 \quad (\text{II.3})$$

d'où

$$\rho_n = \sum_{p=p_0}^{\infty} \kappa_p^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^p \quad (\text{II.4})$$

Lorsque $r \rightarrow 0$, (2.23) se simplifie, en ne conservant que le terme dominant γ_1 dans le développement (2.11.a) de la vitesse de l'écoulement :

$$\frac{p_0(p_0-1)}{L_m^2} \kappa_{p_0}^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{p_0-2} + \frac{p}{L_m^2} \kappa_{p_0}^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{p_0-2} + \left[k k_n - \frac{n^2}{r^2} \right] \kappa_{p_0}^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{p_0} = 0. \quad (\text{II.5})$$

qui se met sous la forme

$$\frac{p_0^2 - n^2}{L_m^2} \kappa_{p_0}^n \left(\frac{r}{L_m} \right)^{-2} = -k k_n \kappa_{p_0}^n. \quad (\text{II.6})$$

Pour $r \rightarrow 0$, cette équation ne peut admettre que deux types de solutions :

$$\begin{aligned} \kappa_{p_0}^n &= 0 && \text{pour } p_0 \neq |n| \\ \text{ou} &&& \\ \kappa_{p_0}^n &\neq 0 && \text{pour } p_0 = |n| \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Ainsi, pour n fixé, la série entière commence pour $p = p_0 = |n|$.

II.B Expression de b_n

La solution générale du problème quantique de diffusion d'un jet de particules par un solénoïde de rayon R s'exprime [BCL⁺80]

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{MQ} \frac{J_{|n+\alpha|}(kr)}{J_{|n+\alpha|}(\beta)} + c_n^{MQ} \frac{H_{|n+\alpha|}^1(kr)}{H_{|n+\alpha|}^1(\beta)} \quad (\text{II.8})$$

qui est la généralisation du résultat énoncé par Aharonov et Bohm [AB59] dans le cas de la diffusion par un solénoïde de rayon $R \rightarrow 0$.

D'autre part, si l'on ne prend pas en compte l'effet de diffusion [OP85] (relations (2.8) et suivantes), la première somme de (II.8) se met sous la forme

$$\Psi(\vec{r}) \propto \exp \left[-i \vec{k} \cdot \vec{r} + i \delta \frac{\theta}{2\pi} \right] \quad (\text{II.9})$$

où θ représente ici l'angle polaire compté à partir de la direction d'incidence (la diffusion vers l'avant a lieu pour $\theta = \pi$) comme indiqué sur la figure II.1. Cette relation représente une onde disloquée que l'on peut écrire sous la forme

$$\Psi(\vec{r}) \propto \exp \left[-i \vec{k} \cdot \vec{r} + i \alpha \theta \right] \quad (\text{II.10})$$

en introduisant le paramètre de la dislocation

$$\alpha = \frac{\delta}{2\pi} = -\frac{q\Phi}{2\pi\hbar}. \quad (\text{II.11})$$

Si l'on prend en compte la diffusion, on peut montrer qu'asymptotiquement (approximation du champ lointain $kr \gg 1$), la solution complète (II.8) de l'équation de Schrödinger du problème de diffusion représente toujours l'onde incidente, mais uniquement en dehors d'un secteur angulaire d'ordre $\sqrt{2kr} \cos(\theta/2)$ dans la direction $\theta = \pi$ où l'on ne peut pas séparer l'onde incidente et l'onde diffusée [BCL⁺80, OP85].

Ainsi, asymptotiquement ($kr \gg 1$), en se plaçant en dehors du voisinage de la direction d'incidence, l'onde incidente est une onde disloquée de la forme :

$$\Psi^{inc}(kr \gg 1) = \exp \left[-i \vec{k} \cdot \vec{r} + i \alpha \theta \right] \quad (\text{II.12})$$

Cette onde disloquée, qui est d'ordre un par rapport à l'onde incidente, n'est pas une solution physique du problème de diffusion dans tout l'espace si on l'écrit sous la forme (II.9) car il s'agit d'une solution multivaluée pour α non entier. La seule solution physiquement acceptable du problème est (II.8).

On doit cependant retrouver cette onde disloquée dans la solution générale (II.8). Or, d'après [GR94] (relation 8.511) :

$$\exp \left(-i \vec{k} \cdot \vec{r} \right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^p e^{ip\theta} J_p(kr) \quad (\text{II.13})$$

où J_p est la fonction de Bessel d'ordre p . De plus, en utilisant la relation fonctionnelle [GR94] (relation 8.404)

$$J_p(kr) = (-1)^p J_{-p}(kr), \quad (\text{II.14})$$

on a

$$\begin{aligned} \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{r}) &= \sum_{p=-\infty}^{-1} (-i)^p e^{i p \theta} (-1)^p J_{-p}(kr) + \sum_{p=0}^{\infty} (-i)^p e^{i p \theta} J_p(kr) \\ &= \sum_{p=-\infty}^{-1} (-1)^p (i)^{3p} e^{i p \theta} J_{|p|}(kr) + \sum_{p=0}^{\infty} (-i)^{|p|} e^{i p \theta} J_{|p|}(kr) \\ &= \sum_{p=-\infty}^{-1} (i)^p e^{i p \theta} J_{|p|}(kr) + \sum_{p=0}^{\infty} (-i)^{|p|} e^{i p \theta} J_{|p|}(kr) \\ &= \sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{1}{(i)^{|p|}} e^{i p \theta} J_{|p|}(kr) + \sum_{p=0}^{\infty} (-i)^{|p|} e^{i p \theta} J_{|p|}(kr) \\ &= \sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{(-i)^{|p|}}{(-i^2)^{|p|}} e^{i p \theta} J_{|p|}(kr) + \sum_{p=0}^{\infty} (-i)^{|p|} e^{i p \theta} J_{|p|}(kr) \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^{|p|} e^{i p \theta} J_{|p|}(kr). \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Ainsi, la relation (II.12) peut s'écrire sous la forme

$$\Psi^{inc}(kr \gg 1) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^{|p|} e^{i p \theta - i \alpha \theta} J_{|p|}(kr) \quad (\text{II.16})$$

qui est une fonction multivaluée de θ pour α non entier. On peut rendre cette fonction monovaluée par le changement d'indice $n = p - \alpha$ [BCL⁺80], qui conduit à

$$\begin{aligned} \Psi^{inc}(kr \gg 1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{|n+\alpha|} e^{i n \theta} J_{|n+\alpha|}(kr) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{|n+\alpha|} J_{|n+\alpha|}(kr) e^{i n \theta} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

d'où, en comparant (II.8) et (II.17)

$$b_n^{MQ} = (-i)^{|n+\alpha|} J_{|n+\alpha|}(\beta). \quad (\text{II.18})$$

La solution (II.8) est analogue à la solution classique (2.33.b) à l'extérieur du tourbillon, l'indice $|n + \alpha|$ étant remplacé par $m = \sqrt{n^2 + 2n\alpha}$. On peut effectuer le même raisonnement que précédemment, en effectuant le changement d'indice $m = |n + \alpha|$ dans le développement (II.17). Ainsi, on arrive à :

$$b_n = (-i)^m J_m(\beta). \quad (\text{II.19})$$

On remarque que la condition sur l'onde disloquée est différente dans le cas quantique ($b_n^{MQ} \propto (-i)^{|n+\alpha|}$) et dans le cas classique ($b_n \propto (-i)^{\sqrt{n^2+2n\alpha}}$). Cette différence est essentiellement importante pour de faibles valeurs de n et provient des modélisations différentes de l'interaction classique et l'interaction quantique : en mécanique quantique, l'onde ne pénètre pas dans le solénoïde alors qu'en acoustique, l'onde sonore traverse le tourbillon.

Chapitre III

Simulation numérique

L'imprimante avait sorti plus de deux cents pages de données. La page de couverture présentait une courbe en cloche assez irrégulière pour les possibilités d'allure, et au-dessous apparaissait la courbe prévisionnelle du bruit. Les solutions étaient imprimées cas par cas sur les autres feuilles. Comme prévu, les courbes étaient assez embrouillées.

T. Clancy.

1. Introduction

1.1 Généralités

Nous présentons dans ce chapitre les techniques mises en œuvre pour réaliser une simulation numérique directe des équations modélisant un écoulement compressible et non dissipatif. L'intérêt d'une telle simulation numérique est de pouvoir explorer, pour une géométrie et un type d'écoulement (taille caractéristique L) fixés, une large gamme de paramètres (nombre de Mach \mathcal{M} de l'écoulement, l'onde sonore de longueur d'onde λ) et d'être en mesure d'acquérir des données sur l'interaction son-écoulement dans des régions très difficilement accessibles par l'expérience [CLM94]. De plus, une simulation numérique des équations complètes permet de prendre en compte l'ensemble de l'interaction son-écoulement, contrairement à une simulation des équations linéarisées présentées au paragraphe 3.4 du chapitre I.

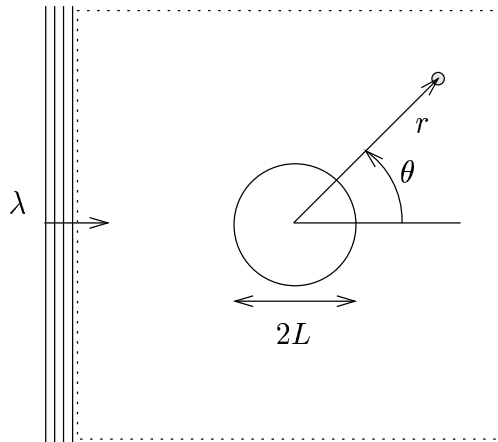


FIG. III.1 – *Configuration numérique typique : (...) délimite le domaine de simulation.*

Nous nous contentons ici de simuler des écoulements bidimensionnels, solutions des équations de la dynamique des fluides compressibles, adiabatiques et non dissipatifs. Une configuration numérique usuellement employée dans nos études de diffusion du son est présentée sur la figure III.1 : une onde sonore plane monochromatique de longueur d'onde

λ est émise sur une des frontières du domaine de calcul et interagit avec un écoulement de taille caractéristique $2L$. Des « microphones » permettent d'acquérir les champs sonores au cours du temps en différents points (r, θ) .

Nous allons tout d'abord décrire de manière très générale la méthode de calcul des quantités sonores, ainsi que les caractéristiques des différentes simulations réalisées. Nous abordons ensuite le schéma intérieur utilisé puis nous détaillons la procédure que nous avons développée pour traiter les conditions aux limites de la simulation numérique. La simulation est validée à l'aide de quelques tests « standards ». Enfin, nous présentons des éléments de validation de la simulation numérique dans le cadre du problème de diffusion du son par un écoulement.

1.2 Calcul des quantités sonores

La procédure de calcul des quantités sonores est identique pour toutes les simulations numériques. Elle est présentée sur la figure III.2 dans le cas de la diffusion d'une onde sonore de longueur d'onde λ par un vortex de Taylor de taille caractéristique $L = \lambda/5$ (sa structure est détaillée au paragraphe 1.2.1 du chapitre IV) et repéré sur les figures par un cercle de rayon L . L'algorithme général comporte deux étapes présentées sur la figure III.2 :

Étape a : en partant d'une condition initiale, correspondant à la solution analytique de l'écoulement moyen, on effectue n_1 itérations temporelles afin d'obtenir un état stationnaire pour l'écoulement étudié ;

Étape b : on effectue simultanément trois simulations numériques :

- évolution de l'écoulement seul $\longrightarrow \rho_{ecoul}(t)$ (masse volumique de l'écoulement). Cette étape permet de prendre en compte la dissipation numérique du code ;
- évolution de l'onde sonore dans un milieu au repos $\longrightarrow \rho_{inc}(t)$ (masse volumique de l'onde sonore incidente). Cette étape permet de prendre en compte la dispersion numérique et la dissipation numérique du code au niveau de l'onde sonore incidente ;
- évolution de l'onde sonore en interaction avec l'écoulement moyen $\longrightarrow \rho_{tot}(t)$.

On en déduit alors la masse volumique associée à l'onde sonore

$$\rho_{son} = \rho_{tot} - \rho_{ecoul} \quad (1.1)$$

et la masse volumique associée à l'onde sonore diffusée, en utilisant la définition 3.1 du paragraphe 3.2 du chapitre I :

$$\rho_{diff} = \rho_{son} - \rho_{inc}. \quad (1.2)$$

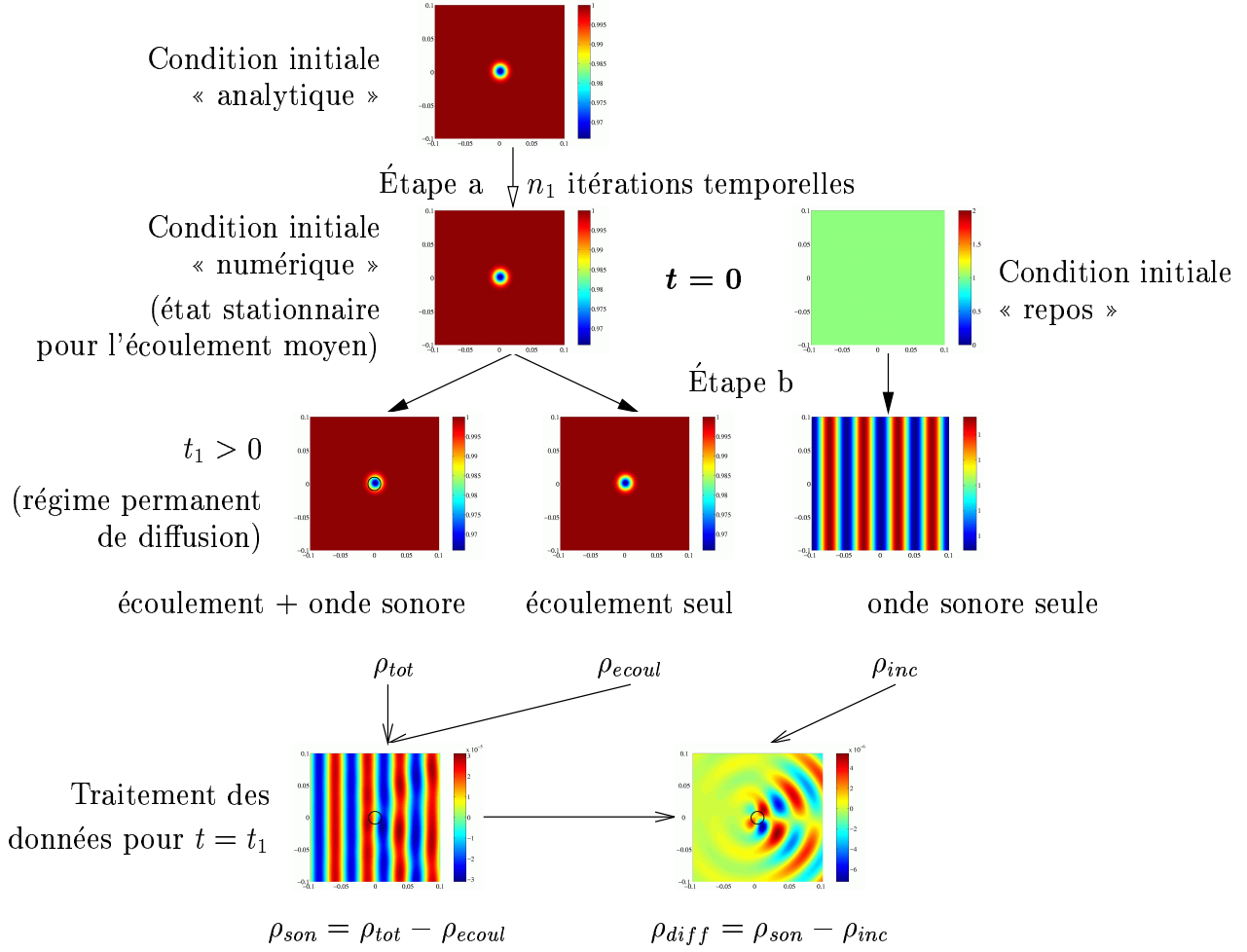


FIG. III.2 – Procédure de calcul des quantités sonores à partir d'une condition initiale analytique.

Nous discuterons de la pertinence de cette définition de l'onde diffusée dans le cas des écoulements à circulation non nulle au chapitre V. Ayant ainsi accès à l'onde diffusée lors de l'interaction onde écoulement, on en déduit l'amplitude de diffusion $f(\theta)$ pour différentes distances r au tourbillon, en moyennant les acquisitions temporelles effectuées.

Pour l'étude de la diffusion du son, nous avons principalement utilisé trois configurations numériques, que nous noterons dans la suite A1, A2 et B :

- Configuration A1 : un domaine de taille $0.8\text{ m} \times 0.8\text{ m}$ ($R \leq 0.4\text{ m}$) discrétisé par un maillage de 1024×1024 points ($d_x = 7.81 \cdot 10^{-4}\text{ m} = d_y$), un pas de temps $dt = 10^{-6}\text{ s}$ et $n_t = 5000$ itérations temporelles ;
- Configuration A2 : un domaine de taille $0.4\text{ m} \times 0.4\text{ m}$ ($R \leq 0.2\text{ m}$) discrétisé par un maillage de 512×512 points ($d_x = 7.81 \cdot 10^{-4}\text{ m} = d_y$), un pas de temps $dt = 10^{-6}\text{ s}$ et $n_t = 2500$ itérations temporelles ;

- Configuration B: un domaine de taille $0.4\,m \times 0.4\,m$ ($R \leq 0.2\,m$) discrétisé par un maillage de 1024×1024 points ($d_x = 3.91.10^{-4}\,m = d_y$), un pas de temps $dt = 5.10^{-7}\,s$ et $n_t = 5000$ itérations.

Conformément à l'étude de la dispersion et de l'atténuation numérique (voir le paragraphe 4.4), les configurations A1 et A2 sont utilisées pour des longueurs d'onde $\lambda \geq 0.01\,m$, ce qui correspond à une précision d'au moins 12 points de grille par longueur d'onde. La configuration B1 est employée pour des longueurs d'onde $\lambda < 0.01$, afin de préserver une bonne résolution des phénomènes ondulatoires (le pas de grille est deux fois plus petit dans la configuration B par rapport aux configurations A1 et B1).

L'onde sonore incidente est caractérisée par une longueur d'onde variable mais une amplitude constante $v_{inc} = 10^{-2}\,m.s^{-1}$, qui correspond à une pression sonore incidente $p_{inc}/p_{ref} = 3.69.10^{-5}$ et à une masse volumique incidente $\rho_{inc}/\rho_{ref} = 2.63.10^{-5}$. Ce choix pour l'onde sonore nous assure que nous travaillerons dans le cadre de l'acoustique linéaire, puisque $v_{inc}/c_0 = 2.63.10^{-5} \ll 1$ [LL89b].

Pour chaque choix de longueur d'onde, nous avons choisi l'échantillonnage de manière à avoir environ 25 points par période temporelle :

- $\lambda = 0.1\,m \iff T = 2.63.10^{-4}\,s$: échantillonnage tous les $10^{-5}\,s$, soit environ 26 points par période ;
- $\lambda = 0.02\,m \iff T = 5.26.10^{-5}\,s$: échantillonnage tous les $2.10^{-6}\,s$, soit environ 26 points par période ;
- $\lambda = 0.01\,m \iff T = 2.63.10^{-5}\,s$: échantillonnage tous les $10^{-6}\,s$, soit environ 26 points par période ;
- $\lambda = 0.005\,m \iff T = 1.31.10^{-5}\,s$: échantillonnage tous les $5.10^{-7}\,s$, soit environ 26 points par période.

L'acquisition des données numériques, avec une période d'échantillonnage dépendant de la longueur d'onde sonore, a été effectuée sur les $n_{it} = n_t - n_t/5$ ($n_{it} = 4000$ pour les configurations A1 et B et $n_{it} = 2000$ pour la configuration A2) derniers échantillons afin que l'onde incidente ait atteint la zone caractéristique de l'écoulement moyen qui se situe au centre du domaine de calcul. De plus, l'amplitude de diffusion a été calculée en moyennant les acquisitions de la simulation numérique sur les $n_t/2$ dernières itérations temporelles (correspondant au $5n_{it}/8$ dernières acquisitions numériques) afin d'être dans un régime permanent pour la diffusion.

Nous n'avons pas d'évaluation précise du temps de calcul de chacune des étapes décrites ci-dessus et de l'algorithme de calcul que nous allons décrire. Cependant, la procédure décrite précédemment peut prendre plusieurs jours par simulation numérique, pour réaliser l'ensemble des étapes permettant d'accéder au champ diffusé. Pour une configuration fixée (écoulement et grille de maillage donnée), il suffit d'effectuer les deux simulations « son + écoulement » (ρ_{tot}) et « son seul » (ρ_{inc}) lorsque l'on fait varier la longueur d'onde sonore, ce qui réduit le temps de calcul.

À titre d'exemple, chacune des trois simulations de l'étape b prend environ 12 heures sur une station de travail Dec XP1000 dans le cas de la configuration A2 (maillage 512×512 points).

1.3 Algorithme de calcul

Le calcul des quantités sonores nécessite la résolution du problème d'aérodynamique dans l'ensemble du domaine de calcul. Ainsi, deux problèmes numériques différents se posent :

- la résolution du problème à l'intérieur du domaine de calcul : le schéma numérique choisi doit par exemple être capable de résoudre avec précision des problèmes de propagation d'ondes. Nous présenterons le schéma intérieur au paragraphe 2 ainsi que des tests de validation au paragraphe 4 ;
- la spécification des conditions aux limites sur les frontières du domaine, qui doivent être compatibles avec une simulation numérique d'aéroacoustique pour laquelle les frontières sont ouvertes : nous détaillerons au paragraphe 3 la méthode que nous avons développée pour la mise en place de conditions aux limites non-réfléchissantes sur les bords du domaine de calcul.

Chacune des deux étapes a et b présentées sur la figure III.2 correspond à un même schéma numérique intérieur mais à des conditions aux limites différentes (respectivement CL1 ou CL2), que nous détaillerons dans les paragraphes 3.4 et 3.5.

Nous pouvons indiquer ici la procédure de calcul d'une itération temporelle : partant de la valeur U^n des champs à l'instant t , la figure III.3 résume une passe permettant d'aboutir aux valeurs U^{n+1} à l'instant $t + dt$. Nous allons maintenant détailler les différentes étapes permettant la réalisation de la simulation de l'interaction son-écoulement.

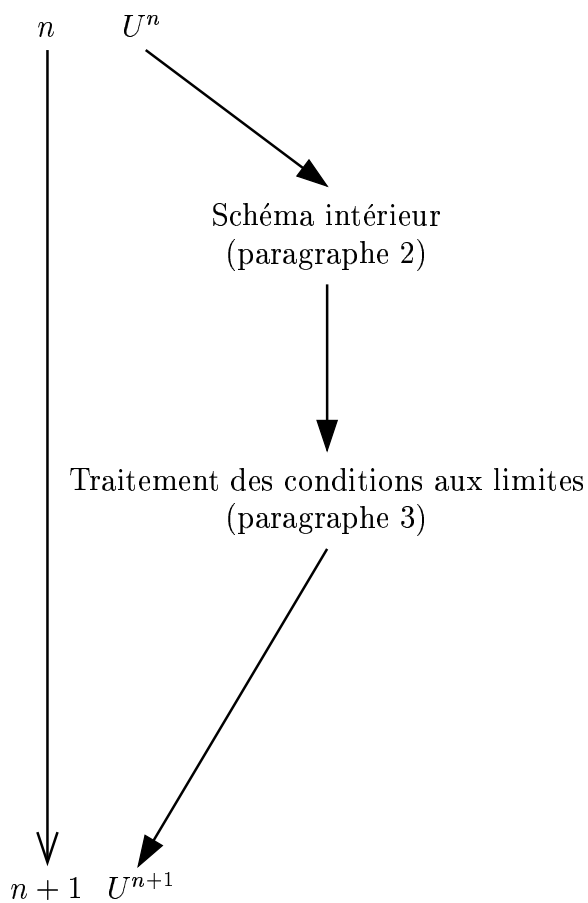


FIG. III.3 – *Analyse simplifiée d'une passe temporelle de l'algorithme de calcul.*

2. Schéma intérieur

2.1 Introduction

Le modèle numérique doit résoudre les équations de la dynamique pour un écoulement compressible, isotherme et non visqueux : l'équation de conservation de la masse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation d'Euler) ainsi que l'équation de conservation de l'énergie totale (énergie cinétique et énergie interne) du système ([LL89b] paragraphe 1, 6 et 7). À deux dimensions, ces relations s'écrivent, sous la forme conservative :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho v u \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v v + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

où ρ , u , v , E et p sont respectivement la masse volumique, les deux composantes de la vitesse selon les axes $x'x$ and $y'y$ d'un repère cartésien, l'énergie volumique totale et la pression du fluide. En supposant le gaz parfait, la pression s'écrit

$$p = (\gamma - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right], \quad (2.3)$$

$\gamma = C_p/C_v$ étant constant.

Remarque : l'écoulement étant non dissipatif et les effets thermiques n'étant pas pris en compte, la relation (2.3) peut être remplacée par

$$p = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma p_0 \quad (2.4)$$

(p_0 et ρ_0 sont respectivement la pression et la masse volumique du fluide au repos) qui traduit les mouvements isentropiques des particules fluides [LL89b].

Il s'agit donc de résoudre numériquement le système des équations (2.1) et (2.3) à partir d'une condition initiale et de conditions aux limites du problème continu, afin d'obtenir les résultats présentés à titre d'exemple sur la figure III.2.

Pour cela, le système (2.1) est discrétisé spatialement et temporellement. Ainsi, on passe de la résolution d'un problème continu à celle du problème discret équivalent, la condition initiale étant inchangée. De nombreux algorithmes ([Sod78, Hir92]) permettent de calculer numériquement l'évolution temporelle de U en combinant une approximation (classique ou compacte [Lel92]) des dérivées spatiales et une procédure d'avancement temporel (algorithme de Runge-Kutta [CLM93, MLM95a, MLM95b] par exemple). D'autres algorithmes calculent l'évolution temporelle de U en effectuant simultanément une discrétisation spatiale et temporelle (algorithme FCT (flux transportés et corrigés) [Ast93, Ber94] par exemple).

Remarque : nous avons volontairement délaissé les méthodes spectrales car elles ne semblent pas adaptées à une mise en œuvre aisée de conditions aux limites ouvertes et non-réfléchissantes sur les frontières du domaine.

Face à cette diversité, les exigences du problème physique ont en partie guidé notre choix. Le schéma numérique doit :

- être précis en espace et en temps afin de résoudre correctement la propagation des ondes acoustiques ;
- posséder une faible dissipation numérique puisque l'on souhaite modéliser les interactions son-écoulement moyen en négligeant la viscosité de l'écoulement.

En outre, on souhaite que le schéma soit robuste vis-à-vis de perturbations acoustiques de grande amplitude pour accéder à l'état stationnaire d'un écoulement à partir du seul champ de vitesse (c'est par exemple le cas pour une paire de tourbillons dont on ne connaît pas l'expression analytique du champ de pression, nécessaire pour la condition initiale)

Après avoir écarté les schémas à correction de flux du type FCT [BB76, Zal79], l'étape de correction n'agissant pas de manière satisfaisante pour les problèmes qui nous intéressent, nous avons choisi d'utiliser un schéma intérieur de type Mac-Cormack, dans une approche de type volumes finis. Ce type de schéma a abondamment été utilisé pour des simulations numériques en mécanique des fluides du fait de sa simplicité de mise œuvre, de son ordre élevé et de son bon comportement vis à vis de la propagation des ondes acoustiques [MBT81, BMPT85, RS92].

Nous allons maintenant décrire tout d'abord le schéma dans le cas monodimensionnel, expliquer dans un second paragraphe son application dans le cas bidimensionnel de notre étude et enfin discuter de sa stabilité dans une dernière partie.

2.2 Schéma de Mac-Cormack modifié

Il s'agit d'une version modifiée du schéma de Mac-Cormack, proposée par Gottlieb et Turkel [GT76], et déjà utilisée par Gamet et Estivalezes [Gam96] dans le cas d'études aéroacoustiques de jets.

Afin d'expliquer ce schéma, nous nous placerons dans ce paragraphe à une dimension, avec l'équation de conservation :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

2.2.1 Intérieur du domaine de calcul

Considérons un maillage spatial régulier composé de N points, de pas Δx et un pas de temps Δt . Soit C_i^n la valeur de C à l'instant t au point i du maillage. Le schéma, explicite, est basé sur un principe de prédicteur-correcteur. L'étape de prédiction conduit à :

$$\overline{C}_i = C_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i+1/2} - f_{i-1/2}] \quad (2.6)$$

avec

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{6} [7f_{i+1}^n - f_{i+2}^n], \quad (2.7)$$

l'étape de correction conduisant à :

$$\overline{\overline{C}}_i = \overline{C}_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\overline{f}_{i+1/2} - \overline{f}_{i-1/2}] \quad (2.8)$$

avec

$$\overline{f}_{i+1/2} = \frac{1}{6} [7\overline{f}_i - \overline{f}_{i-1}]. \quad (2.9)$$

La solution C_i^{n+1} à l'instant $t + \delta t$ est alors obtenue par :

$$C_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{C}}_i + C_i^n) \quad (2.10)$$

que l'on note, pour plus de simplicité

$$C_i^{n+1} = L_x^+ C_i^n. \quad (2.11)$$

Le schéma est d'ordre 4 en espace et d'ordre 2 en temps [GT76]. Dans le cas des équations (2.7) et (2.9), le prédicteur est approximé aux différences finies amont tandis que le correcteur est approximé aux différences finies aval. Il est évidemment possible d'écrire un schéma analogue en considérant un prédicteur aval et un correcteur amont, que l'on notera alors

$$C_i^{n+1} = L_x^- C_i^n. \quad (2.12)$$

Ces deux écritures du schéma de Mac-Cormack permettent de symétriser le problème étudié (voir le paragraphe 2.3), afin de ne pas favoriser numériquement la propagation des ondes selon les x croissants ou selon les x décroissants.

2.2.2 Frontières du domaine de calcul

Aux extrémités du domaine de calcul (points $i = 1, 2$ et $i = N - 1, N$), le schéma (2.6)-(2.10) fait intervenir la valeur de C en des points qui ne font pas partie de la discrétisation numérique (points $i = -1, 0, N + 1, N + 2$). Afin de pouvoir avancer la solution en temps sur ces points frontières à l'aide du schéma de Mac-Cormack, on calcule la valeur des flux en ces points, durant les deux étapes prédicteur et correcteur, à l'aide d'une extrapolation d'ordre 3. Dans le cas d'une approximation aux différences finies aval, on prend ainsi [Tur80, BMPT85] :

$$\begin{aligned} f_{N+1} &= 4f_N - 6f_{N-1} + 4f_{N-2} - f_{N-3} \\ f_{N+2} &= 4f_{N+1} - 6f_N + 4f_{N-1} - f_{N-2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

et pour un passage amont

$$\begin{aligned} f_0 &= 4f_1 - 6f_2 + 4f_3 - f_4 \\ f_{-1} &= 4f_0 - 6f_1 + 4f_2 - f_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Comme le souligne Turkel [Tur80], ces extrapolations sont analogues à un décentrement du schéma au niveau des points frontières. De plus, elles n'affectent pas la précision du schéma intérieur : un schéma d'ordre n peut être approximé à l'ordre $n - 1$ sur les points frontières sans affecter sa précision [Tho90]

Il est très important de noter qu'à ce stade, les conditions aux limites physiques n'ont pas encore été spécifiées sur les bords du domaine de calcul. L'extrapolation des flux ne permet que d'effectuer l'avancement en temps sur l'ensemble du domaine de calcul. Il reste alors à spécifier les conditions aux limites sur les points frontières C_F^* , valeurs de C sur la frontière après l'extrapolation.

2.3 Application à deux dimensions

À deux dimensions, on résout le système (2.1) en le projetant successivement sur chacune des deux directions x et y . On parle de séparation (« splitting » en anglais) en opérateurs monodimensionnels. La séquence de séparation choisie s'exprime [Tur80] :

$$\begin{cases} U^{n+1} &= L_y^+ L_x^+ U^n & t \longrightarrow t + \delta t \\ U^{n+2} &= L_y^- L_x^- U^{n+1} & t + \delta t \longrightarrow t + 2\delta t \\ U^{n+3} &= L_x^- L_y^- U^{n+2} & t + 2\delta t \longrightarrow t + 3\delta t \\ U^{n+4} &= L_x^+ L_y^+ U^{n+3} & t + 3\delta t \longrightarrow t + \underbrace{4\delta t}_{\Delta t} \end{cases} \quad (2.15)$$

où $L_{x_i}^+$ (resp. $L_{x_i}^-$) correspond à une passe selon x_i ($x_i = x, y$) avec un prédicteur aval (resp. amont) et un correcteur amont (resp. aval). Cette séquence permet de conserver un schéma numérique symétrique selon les x croissants et décroissants et selon les deux directions x et y . On peut l'écrire sous la forme plus condensée

$$U^{n+4} = L_x^+ L_y^+ L_x^- L_y^- L_y^- L_x^- L_y^+ L_x^+ U^n \quad (2.16)$$

qui permet en quatre passes de pas de temps δt d'avancer le champ U de t à $t + \Delta t$.

La précision de l'algorithme est alors préservée : le schéma (2.16) résultant de cette alternance de passes est précis au quatrième ordre en espace et au second ordre en temps.

2.4 Stabilité du schéma Mac-Cormack 2-4

Le schéma est numériquement stable pour une certaine gamme de pas d'espace et de temps, liés par la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), qui s'exprime à deux dimensions :

$$CFL = \Delta t \max_{(i,j)} \left[\frac{u_{i,j} + c}{\Delta x}, \frac{v_{i,j} + c}{\Delta y} \right] < \frac{2}{3}. \quad (2.17)$$

Il s'agit de la condition de stabilité la plus forte provenant de la séparation effectuée au paragraphe 2.3.

Cette condition signifie que plus l'échelle spatiale que l'on souhaite étudier est petite, plus le pas d'intégration devra être choisi petit afin que la procédure numérique soit stable.

D'un point de vue physique, une onde se propageant à la vitesse c durant dt ne doit pas parcourir une distance supérieure à $2\Delta x/2$ afin que tout l'information qu'elle transporte soit conservée.

2.5 Conclusion

Avec les notations du schéma III.3, nous avons maintenant obtenu les valeurs de U dans le domaine (U^{n+1}) et sur les frontières (notées U_F^{n*}). Il nous reste à spécifier les conditions aux limites afin d'obtenir la valeur du champ U_F^{n+1} à l'instant $n+1$. Pour cela, il nous faut imposer des conditions aux limites numériques sur les frontières du domaine, traduisant les conditions aux limites physiques du problème étudié.

3. Algorithme des conditions aux limites

3.1 Introduction

La dernière étape permettant d'achever une passe de calcul (schéma III.3) est de spécifier les conditions aux limites sur les frontières du domaine de calcul. Pour cela, il nous faut tout d'abord choisir les conditions aux limites physiques que nous souhaitons modéliser (un émetteur sonore, une paroi fixe, ...) puis les traduire « numériquement » afin de les imposer aux nouvelles variables U_F^{n+1} , valeurs du champ U_F sur les frontières du domaine à l'instant $n + 1$. C'est ce que nous allons détailler dans l'ensemble de cette partie.

Nous allons tout d'abord préciser la problématique des conditions aux limites pour la simulation numérique, sans rentrer dans une analyse mathématique qui se révèle souvent très technique [EM77, Hig86, Hir92]. Le système (2.1) que nous devons résoudre est un système hyperbolique car il peut se mettre sous la forme (paragraphe 3.3.1)

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

avec $\tilde{U} = (\rho \ u \ v \ p)^t$, les matrices A et B étant diagonalisables avec des valeurs propres réelles [Str89]. Cela signifie physiquement que le système (3.1) traduit la propagation d'ondes dans le domaine d'étude, conformément à l'analyse de Chu *et al.* d'un écoulement compressible [CK58].

« Les systèmes d'équations hyperboliques modélisent la propagation d'ondes et à chaque frontière, des ondes rentrent dans le domaine de calcul et d'autres en sortent. Les ondes sortantes ont leur comportement complètement défini par la solution à la frontière et à l'intérieur, et aucune condition aux limites ne doit donc être spécifiée. Les ondes entrantes dépendent de la solution à l'extérieur du domaine de calcul et leur comportement nécessite donc des conditions aux limites » [Tho90].

On comprend maintenant où réside la difficulté majeure de la modélisation numérique de l'interaction son-écoulement : nous avons à traiter des ondes sonores se propageant dans le domaine de calcul et nous ne voulons pas qu'elles se réfléchissent sur les frontières

(frontières ouvertes non-réfléchissantes). Il s'agit d'une situation beaucoup plus difficile à résoudre numériquement que des conditions aux limites périodiques ou parfaitement réfléchissantes : dans ces deux cas, on peut se contenter d'imposer les valeurs des champs au niveau de la frontière sans avoir à faire une analyse en termes d'ondes entrantes et sortantes.

Afin d'obtenir un algorithme de conditions aux limites permettant une modélisation convenable des processus de diffusion du son par un écoulement (i.e. modélisant numériquement des conditions aux limites continues de radiation pour les ondes sonores), nous nous sommes basés sur la méthode des caractéristiques, formalisée par Thompson dans le cas des équations hyperboliques [Tho87, Tho90] et étendue au cas des équations de Navier-Stokes par Poinso et Lele [PL92]. Cette méthode présente l'avantage d'analyser le système en termes de quantités ondulatoires traversant la frontière du domaine de calcul et nous permet de spécifier de manière simple une frontière ouverte non-réfléchissante. Elle permet de plus de s'assurer que le problème des conditions aux limites est numériquement bien posé, c'est-à-dire que l'on impose le bon nombre de conditions physiques nécessaires sur la frontière du domaine : ce nombre est égal au nombre de variables caractéristiques entrantes dans le domaine de calcul ([PL92] et paragraphe 3.3.1). Le principe de la méthode est rappelé dans l'annexe III.A et sa mise en pratique pour notre code [GE95] dans l'annexe III.B.

Dans la suite de ce paragraphe, nous détaillons quelques conditions aux limites physiques (i.e. solutions du problème physique continu) susceptibles d'entrer en jeu dans un problème de dynamique des fluides ainsi que celles utilisées dans le cadre de l'étude de la diffusion du son par un écoulement. Nous traduisons ensuite numériquement ces dernières, que nous avons implémenter dans le code (schéma III.3). Nous décrivons enfin les algorithmes de calcul CL_1 et CL_2 des champs que nous avons mis en place dans la simulation numérique pour les conditions aux limites de la procédure décrite sur la figure III.2. L'algorithme CL_2 que nous avons développé constitue une modification importante de l'algorithme initial CL_1 de traitement des conditions aux limites [Gam96] afin de corriger la dérive de l'écoulement moyen en présence de frontières ouvertes non-réfléchissantes : ce type de frontières peut conduire à un problème physiquement mal posé bien qu'il soit numériquement bien formulé (paragraphe 3.3.5).

3.2 Conditions aux limites physiques

La simulation numérique doit non seulement prendre en compte le problème physique intérieur mais aussi les conditions aux limites que l'on doit imposer pour une modélisation correcte d'une situation physique dans un domaine numérique de taille finie.

♦ **Exemples généraux :** les conditions aux limites du problème continu peuvent être :

- paroi solide en $x = x_0$: physiquement, on a $u = 0$ en $x = x_0$ puisque l'écoulement est parfait ;

• entrée subsonique en $x = x_0$: on impose dans ce cas les deux composantes u et v de la vitesse et la température au niveau de la frontière $x = x_0$ (trois relations sont nécessaires pour que le problème soit bien posé).

♦ **Conditions aux limites utilisées en diffusion** : dans le cadre du problème de diffusion du son par un écoulement, nous avons à prendre en compte deux types de conditions aux limites pour le problème continu :

• frontière ouverte non-réfléchissante en $x = x_0$: on veut modéliser une frontière parfaitement non-réfléchissante en $x = x_0$, i.e. que toutes les quantités atteignant la frontière du domaine la traversent sans aucune réflexion.

En présence d'une paroi solide, il suffit d'imposer $u = 0$ sur la frontière. Ici, le problème est plus compliqué car nous sommes en présence d'ondes qui traversent une frontière libre. Nous verrons au paragraphe 3.3 que l'analyse en terme de variables caractéristiques permet une implémentation simple de ce type de conditions aux limites;

• émetteur sonore non-réfléchissant en $x = x_0$: on impose dans ce cas la vitesse de l'onde sonore sur la frontière :

$$\begin{cases} u_s &= u_0 \sin(2\pi f t) \\ v_s &= 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où $f = c/\lambda$ est la fréquence sonore. On souhaite que l'émetteur soit une frontière non-réfléchissante, i.e. que la seule onde sonore entrante soit modélisée par (3.2).

Ainsi, le problème physique impose un certain nombre de conditions aux limites, qui se traduisent par des relations entre les variables du problème. Il nous faut maintenant « traduire » numériquement ces conditions aux limites continues, afin de calculer les valeurs des variables sur les frontières du domaine à l'aide des valeurs que nous connaissons à l'intérieur du domaine de calcul.

3.3 Conditions aux limites numériques

3.3.1 Introduction

La transposition en termes discrets des conditions aux limites que nous avons évoquées au paragraphe précédent peut être effectuée de multiples manières (voir par exemple l'article de Hayder *et al.* [HT95]).

Nous avons choisi de traiter le problème des conditions aux limites à l'aide de la méthode des caractéristiques, dont nous avons rappelé le principe dans l'annexe III.A : en

écrivant le système (2.1) sous la forme non-conservative

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

avec

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

l'évolution des quantités physiques au niveau des frontières est interprétée en termes de modes caractéristiques, qui sont équivalents à des ondes se propageant à travers la frontière. Les conditions aux limites physiques sont ainsi interprétées en termes de valeurs des grandeurs caractéristiques, qui dans le traitement que nous effectuons, sont des variations temporelles notées w_i (annexe III.B) (nous avons volontairement omis la notation « $_-$ » utilisée dans l'annexe afin de ne pas alourdir la présentation) :

$$\begin{cases} w_1 &= \frac{\delta p}{\delta t} - c^2 \frac{\delta \rho}{\delta t} \\ w_2 &= \frac{\delta v}{\delta t} \\ w_3 &= \frac{\delta p}{\delta t} + \rho c \frac{\delta u}{\delta t} \\ w_4 &= \frac{\delta p}{\delta t} - \rho c \frac{\delta u}{\delta t} \end{cases} \quad (3.5)$$

où c est la vitesse du son, les valeurs propres associées à ces variables caractéristiques étant

$$\lambda_1 = u = \lambda_2, \quad \lambda_3 = u + c, \quad \lambda_4 = u - c. \quad (3.6)$$

Ainsi, l'évolution des composantes de la vitesse au niveau de la frontière s'exprime :

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta t} &= \frac{1}{2\rho c} (w_3 - w_4) \\ \frac{\delta v}{\delta t} &= w_2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Il est important de noter que le sens de propagation des variables caractéristiques dépend de la nature de l'écoulement (subsonique ($\|u\| < c$) ou supersonique ($\|u\| > c$)) et de la nature de la frontière (entrée ($u = \vec{v} \cdot \hat{x} < 0$) ou sortie ($u = \vec{v} \cdot \hat{x} > 0$) avec \hat{x} la normale extérieure au domaine), qui fixent le signe des valeurs propres λ_i (relation (3.6) (voir figure III.4).

Ainsi, dans le cas d'un écoulement subsonique,

- ◇ pour une entrée ($u < 0$) en x_0 , il faut imposer les valeurs de w_1 , w_2 et w_4 , w_3 étant calculée à partir des valeurs des champs à l'intérieur du domaine ;

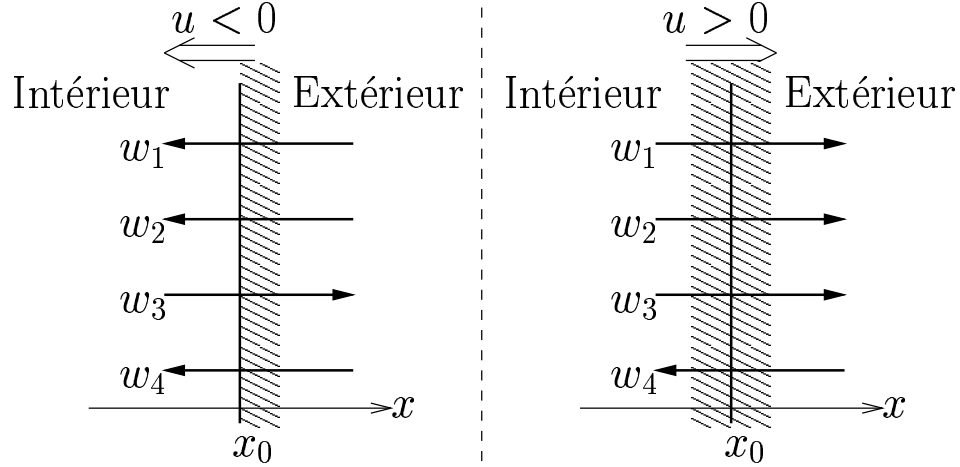


FIG. III.4 – Variables caractéristiques pour une entrée (figure de gauche) et pour une sortie (figure de droite) en $x = x_0$, dans le cas d'un écoulement subsonique

◇ pour une sortie ($u > 0$) en x_0 , il faut juste imposer la valeur de w_4 .

Remarque : Les différentes conditions et leur traitement numérique présentés dans la suite ne sont valables que pour un écoulement subsonique, i.e. $|u| \leq c$. En termes de caractéristiques, cela correspond, pour une frontière située en $x = x_0$, à l'une des deux situations de la figure III.4. Dans le cas d'un écoulement supersonique, la situation est différente car le signe des valeurs propres (3.6) n'est pas le même.

Nous allons maintenant détailler les conditions aux limites que nous avons imposées numériquement, tout d'abord sur les deux exemples physiques du paragraphe précédent, puis dans le cas des conditions aux limites que nous avons utilisées dans l'étude de l'interaction son-écoulement (paragraphe 3.2). Nous expliciterons ensuite la mise en œuvre pratique du traitement des conditions aux limites dans l'algorithme de calcul.

3.3.2 Exemples

• **paroi solide:** on a $u = 0$ en $x = x_0$. On se trouve donc dans le cas intermédiaire entre les deux situations de la figure III.4, les modes w_1 et w_2 ne se propageant pas ($\lambda_1 = \lambda_2 = u = 0$).

Ainsi, d'après (3.7), $w_4 = w_3$ et $w_1 = 0 = w_2$ d'après les relations (3.5) puisque $u = 0$. Une paroi solide en $x = x_0$ sera donc modélisée numériquement par :

$$u = 0, \quad w_1 = 0 = w_2, \quad w_4 = w_3 \quad (3.8)$$

la caractéristique sortante w_3 étant calculée à partir des valeurs des champs dans le domaine. On détermine ainsi l'évolution temporelle de ρ , v et p à l'aide des relations (3.17)

En termes de variables physiques, on a les relations (annexes III.A et III.B) :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} &= w_2 = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{w_3}{u+c} + \frac{w_4}{u-c} \right) = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{1}{\rho T(\gamma-1)} w_1 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

où $s = C_v \ln(p/\rho^\gamma) + C^{\text{te}}$ est l'entropie volumique du système. Ainsi, le choix des caractéristiques (3.8) revient physiquement à considérer la paroi non adhérente (v n'est pas influencé par la paroi), parfaitement réfléchissante pour les ondes sonores (gradient de pression nul à la paroi puisque $u = 0$) et isentropique ($s = C^{\text{te}}$), ce qui est cohérent avec la présence d'une paroi solide dans un écoulement compressible sans dissipation.

• **entrée subsonique:** on impose dans ce cas les deux composantes u et v de la vitesse et la température au niveau de la frontière $x = x_0$. Trois relations sont nécessaires pour que le problème soit bien posé, puisque trois caractéristiques rentrent dans le domaine de calcul, w_3 étant exprimée à partir des valeurs des champs à l'intérieur du domaine de calcul.

Les relations (3.7) permettent alors de déterminer w_4 et w_2 . De plus, en appliquant la loi des gaz parfaits $\rho = pM/RT$ (M est la masse molaire du gaz), la température à la frontière est déterminée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{T}{\rho c^2} [w_1 - 0.5(\gamma-1)(w_3 + w_4)] \quad (3.10)$$

ce qui permet de calculer w_1 . Ainsi, les trois caractéristiques entrantes s'expriment :

$$\begin{cases} w_1 &= -\frac{\rho c^2}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + [0.5(\gamma-1)(w_3 + w_4)] \\ w_2 &= \frac{\partial v}{\partial t} \\ w_4 &= w_3 - 2\rho c \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (3.11)$$

Numériquement, on impose donc les deux composantes de la vitesse (la température n'intervenant pas explicitement). Les trois caractéristiques entrantes w_1 , w_2 et w_4 sont alors déterminées par les relations (3.11) en prenant $T = C^{\text{te}}$. On en déduit ρ et p à l'aide des relations (3.17).

3.3.3 Conditions aux limites pour l'étude de la diffusion du son

• **frontière ouverte non-réfléchissante:** il peut s'agir d'une entrée ($\vec{u} \cdot \vec{n} < 0$) ou d'une sortie ($\vec{u} \cdot \vec{n} > 0$) (voir figure III.4). Dans les deux cas, puisque l'on veut modéliser

une frontière parfaitement non-réfléchissante en $x = x_0$, il faut annuler l'amplitude des variables caractéristiques entrantes :

- entrée subsonique non-réfléchissante : trois caractéristiques entrent dans le domaine de calcul. Ainsi, il faut imposer

$$w_1 = 0 = w_2 = w_4, \quad (3.12)$$

w_3 étant exprimée à partir des valeurs des champs à l'intérieur. Cela revient physiquement à supprimer les ondes sonores, d'entropie et d'advection entrantes.

- sortie subsonique non-réfléchissante : seule la caractéristique w_4 entre dans le domaine de calcul. Ainsi, il faut imposer numériquement

$$w_4 = 0, \quad (3.13)$$

w_1 , w_2 et w_3 étant calculées à partir des valeurs intérieures des champs. Cela revient à annuler l'onde sonore entrante.

émetteur sonore non-réfléchissant en $x = x_0$: on impose dans ce cas la vitesse de l'onde sonore sur la frontière :

$$\begin{cases} u_s &= u_0 \sin(2\pi f t) \\ v_s &= 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

où $f = c/\lambda$ est la fréquence sonore. On souhaite que l'émetteur soit une frontière non-réfléchissante, i.e. que la seule onde sonore entrante soit modélisée par (3.14). En termes de caractéristiques, les deux composantes de la vitesse s'expriment par les relations (3.7). Ainsi, on impose :

$$w_1 = 0 = w_2 \quad \text{et} \quad w_4 = -2\rho c \frac{\partial u_s}{\partial t} \quad (3.15)$$

dans le cas d'une entrée et

$$w_4 = -2\rho c \frac{\partial u_s}{\partial t} \quad (3.16)$$

dans le cas d'une sortie.

3.3.4 Mise en œuvre

L'avancement en temps s'effectue grâce aux passes (2.16). Pour chaque passe, on calcule tout d'abord l'avancement temporel des variables U en utilisant les valeurs des flux extrapolés, selon la procédure décrite au paragraphe 2. On applique ensuite le traitement des conditions aux limites décrit ci-dessus selon le processus suivant [HT95, Gam96] :

1. on déduit des variables conservatives U_F^{n*} les valeurs des variables primitives \tilde{U}_F^{n*} au niveau de la frontière ;

2. les grandeurs ρ et c sont déduites des valeurs des champs \tilde{U}_F^{n*} à l'instant n au niveau des frontières ;
3. on calcule alors les valeurs propres λ_i (relations (3.6) et les variations temporelles w_i^* des variables caractéristiques (relations (3.5)) ;
4. le signe des valeurs propres au niveau de la frontière, associé aux conditions aux limites physiques que l'on souhaite imposer (voir le paragraphe 3.2), fournit de nouvelles expressions des variables caractéristiques, notées w_i^{**} (paragraphe 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3) ;
5. on calcule alors les nouvelles valeurs des champs au niveau de la frontière à l'instant $n + 1$ \tilde{U}_F^{n+1} à partir des valeurs \tilde{U}_F^{n*} en inversant les relations (3.5) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} & = & \frac{\delta \rho}{\delta t} = \frac{1}{2c^2} (w_3^{**} + w_4^{**} - 2w_1^{**}) \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} & = & \frac{\delta u}{\delta t} = \frac{1}{2\rho c} (w_3^{**} - w_4^{**}) \\ \frac{v^{n+1} - v^n}{\delta t} & = & \frac{\delta v}{\delta t} = w_2^{**} \\ \frac{p^{n+1} - p^n}{\delta t} & = & \frac{\delta p}{\delta t} = \frac{1}{2} (w_3^{**} - w_4^{**}) \end{array} \right. \quad (3.17)$$

6. on reconstruit alors les variables conservatives U_F^{n+1} à l'instant $n + 1$ au niveau de la frontière (l'énergie est calculée à l'aide de la relation (2.3), ce qui achève la passe considérée : on connaît alors à l'instant $n + 1$ le champ U_i^{n+1} , respectant les conditions aux limites physiques que l'on doit modéliser, dans l'ensemble du domaine de calcul.

3.3.5 Discussion

- ₁ La méthode des caractéristiques que nous utilisons n'impose que les variations temporelles des variables primitives, et donc des variables conservatives. En conséquence, il est parfois nécessaire d'imposer explicitement la valeur des champs au niveau de la frontière.

De plus, les simulations numériques montrent que pour certains choix de $\lambda/\Delta x$, l'onde sonore a ainsi une valeur moyenne non nulle. Cependant, cette valeur moyenne est au moins un ordre de grandeur plus faible que l'amplitude sonore, et elle n'a donc pas d'effets sur les champs sonores et sur l'écoulement moyen.

- ₂ Le traitement proposé ne prend en compte que les ondes traversant perpendiculairement la frontière étudiée (procédure monodimensionnelle). Ainsi, une paroi ne sera parfaitement non-réfléchissante que pour des ondes ayant une incidence normale à la frontière. Un traitement bidimensionnel [Gil90, LT96,

Nic98] permettrait de prendre en compte l'angle d'incidence des ondes sur la frontière et de réduire les réflexions parasites.

- ₃ Dans le cas d'une sortie, il faut imposer $w_4 = 0$ pour que la frontière soit parfaitement non-réfléchissante. Or, imposer ce type de condition peut conduire à une instabilité numérique à la frontière [RS80, PL92], dans le cas de la recherche d'un écoulement stationnaire par exemple. En effet, imposer $w_4 = 0$ implique qu'il n'y a pas d'onde acoustique rentrant dans le domaine de calcul : aucune information physique ne sera donc transmise à l'écoulement sur le comportement « à l'infini » (par exemple la valeur de la pression au repos) : le problème physique est donc mal posé, même si numériquement, imposer la valeur de w_4 est correct. Afin de prendre en compte la valeur de la pression à l'infini et de conserver un problème bien posé à la frontière, Poinso *et al.* [PL92] proposent de prendre :

$$w_4 = w_4^{\text{exact}} + K(p - p_\infty) \quad \text{avec } K = \sigma(1 - \mathcal{M}^2)c/L \quad (3.18)$$

où w_4^{exact} est la valeur de la caractéristique que l'on peut calculer analytiquement, c est la vitesse du son, L la taille du domaine, \mathcal{M} le nombre de Mach et σ une constante. La forme de K est analogue à celle proposée par Rudy *et al.* [RS80], bien qu'ils n'appliquent la correction qu'à l'équation de l'énergie. Leurs différents tests montrent qu'un choix acceptable est $\sigma = 0.25$ mais ils soulignent également que ce paramètre doit être ajusté selon les configurations et les algorithmes numériques ([Hir92] paragraphe 19.1.6) : σ est choisi numériquement afin de faire converger rapidement l'écoulement moyen. Ainsi, dans notre cas, le choix optimal est $\sigma = 0.15$ [Gam96], et pour modéliser une sortie subsonique non réfléchissante, on prendra donc :

$$w_4 = 0.15(1 - \mathcal{M}^2)c/L(p - p_\infty). \quad (3.19)$$

3.3.6 Conclusion

Nous avons vu dans ce paragraphe les conditions aux limites numériques à imposer selon le type de conditions aux limites physique que nous souhaitons modéliser. Nous allons maintenant décrire les deux procédures d'application des conditions aux limites (algorithmes CL₁ et CL₂) utilisées lors des simulations de l'interaction son-écoulement (voir la figure III.1 et le paragraphe 1.3).

3.4 Algorithme CL₁

La procédure de calcul CL₁ est utilisée dans la première étape de la simulation numérique (étape a de la figure III.1) permettant l'adaptation de la condition initiale analytique à la discrétisation du schéma numérique. Il s'agit alors simplement d'appliquer les conditions aux limites décrites au paragraphe 3.3.3 : nous imposons sur les quatre

parois du domaine de calcul la condition « frontière ouverte non-réfléchissante » avec correction, ce qui nous conduit à appliquer les conditions (3.12) et (3.19) sur chaque frontière : en notant \hat{n} la normale extérieure à la frontière, on impose numériquement sur l'ensemble des champs aux frontières :

$$\begin{aligned} w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_4 = 0 & \quad \text{si} \quad \vec{v} \cdot \hat{n} < 0 \\ w_4 = 0.15(1 - \mathcal{M}^2)c/L(p - p_\infty) & \quad \text{si} \quad \vec{v} \cdot \hat{n} > 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Il s'agit simplement, dans ce premier algorithme CL_1 , d'imposer des conditions aux limites « usuelles » dans le cas de frontières non-réfléchissantes en présence d'un écoulement moyen [Ast93, PL92, Gam96, Hir92]

3.5 Algorithme CL_2

3.5.1 Position du problème

La simulation numérique du phénomène de diffusion du son par la vorticité est rendue difficile par les ordres de grandeurs très différents qu'il est nécessaire de considérer : l'amplitude de l'onde diffusée est un ordre de grandeur plus faible que l'amplitude de l'onde sonore incidente, qui est elle-même 4 ou 5 ordres de grandeur plus faible que la masse volumique moyenne de l'écoulement ; la taille caractéristique de l'écoulement moyen et la longueur d'onde sonore peuvent différer d'un ordre de grandeur. De plus, il est fondamental d'avoir un algorithme de traitement des conditions aux limites suffisamment précis [CLM93].

Ces différentes contraintes sont relativement bien réalisées par le traitement en termes de caractéristiques décrit au paragraphe 3.3. Cependant, il reste un problème à résoudre afin de modéliser des conditions aux limites « parfaitement » non-réfléchissantes. En effet, dans le cas d'une sortie subsonique non-réfléchissante, il faut imposer

$$w_4 = 0 \quad (3.21)$$

d'après (3.13) afin d'éviter les réflexions sonores parasites sur les parois. Mais, afin de stabiliser l'écoulement moyen et de conserver un problème physiquement bien posé, il faut aussi imposer

$$w_4 = 0.15(1 - \mathcal{M}^2)c/L(p - p_\infty) \quad (3.22)$$

d'après (3.19), ce qui implique des réflexions non négligeables au niveau de la frontière... Le traitement pratique des conditions aux limites que nous avons exposé au paragraphe précédent (algorithme CL_1) doit donc être modifié : il faut appliquer le traitement des conditions aux limites sur la seule partie fluctuante de l'écoulement total (la partie non-fluctuante correspond à l'écoulement moyen). Ainsi, il est possible de modéliser des conditions aux limites « parfaitement » non-réfléchissantes pour le son tout en gardant un problème bien posé pour l'écoulement moyen.

Nous avons ainsi développé un nouvel algorithme de traitement des conditions aux limites, qui est une généralisation à des écoulements non uniformes du traitement proposé par Colonius *et al.* [CLM93]. Ce nouvel algorithme, noté CL₂ permet un traitement satisfaisant du problème des conditions aux limites dans le cadre de la diffusion du son [BAE00]. La procédure de calcul CL₂ est utilisée dans la deuxième étape de la simulation numérique (étape b de la figure III.1) permettant d'obtenir les quantités sonores caractérisant l'interaction son-écoulement.

3.5.2 Décomposition des variables primitives

Le point de départ est le même que pour le traitement des conditions aux limites proposé par Colonius *et al.* [CLM93]. À l'instant t , en chaque point (i, j) de la frontière, les variables primitives $\tilde{U}(t)$ sont décomposées par rapport à un état de référence \tilde{U}_0 supposé stationnaire mais non uniforme :

$$\tilde{U}(t, i, j) = \tilde{U}_0(i, j) + U'(t, i, j) = \tilde{U}_0(i, j) + (\hat{U}(t, i, j) - U_{ref}). \quad (3.23)$$

Les nouvelles variables s'expriment selon

$$\tilde{U}_0(i, j) = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad U'(t, i, j) = \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix}, \quad \hat{U}(t, i, j) = \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix}, \quad U_{ref} = \begin{pmatrix} \rho_{ref} \\ 0 \\ 0 \\ p_{ref} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

et décrivent physiquement :

- $\tilde{U}_0(i, j)$: les variables primitives relatives à l'écoulement moyen, supposé stationnaire mais a priori non uniforme ;
- $U'(t, i, j)$: la perturbation par rapport à l'écoulement moyen, que l'on peut décomposer par rapport à l'état de repos dans le domaine :
 - ◊ U_{ref} : état de repos du fluide dans le domaine de calcul, i.e. $U_{ref} = C^{te}$;
 - ◊ $\hat{U}(t, i, j)$: fluctuations « sonores », relatives à U_{ref} , par rapport à l'écoulement moyen \tilde{U}_0 .

On peut déjà noter que U' et \hat{U} regroupent deux évolutions différentes :

- ◊ les composantes du son (onde incidente, onde diffusée) se propageant dans le milieu lors de l'interaction ;
- ◊ l'évolution de $\tilde{U}_0(i, j)$ qui peut aussi bien provenir des fluctuations de l'écoulement moyen par rapport au schéma numérique (dissipation numérique par exemple) que de sa propre évolution temporelle car il n'est pas physiquement stationnaire (c'est par exemple le cas pour un dipôle de vortacité, que nous étudions au paragraphe 2 du chapitre IV).

De plus, les fluctuations spatio-temporelles des champs U' et \hat{U} sont identiques.

Nous ommetrons désormais la dépendance spatiale (i, j) afin d'alléger les notations. À l'aide de cette décomposition, en supposant que les fluctuations U' sont petites devant \tilde{U}_0 (par exemple $\rho' \ll \rho_0 \implies \frac{1}{\rho} \simeq \frac{1}{\rho_0} - \frac{\rho'}{\rho_0^2}$) la relation (3.3) se met sous la forme :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + (A_0 + A') \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + (B_0 + B') \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} + A' \frac{\partial U_0}{\partial x} + B' \frac{\partial U_0}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & 0 & 1/\rho_0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \gamma p_0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} \quad B_0 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & 1/\rho_0 \\ 0 & 0 & \gamma p_0 & v_0 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

et

$$A' = \begin{pmatrix} u' & \rho' & 0 & 0 \\ 0 & u' & 0 & -\rho'/\rho_0^2 \\ 0 & 0 & u' & 0 \\ 0 & \gamma p' & 0 & u' \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} v' & 0 & \rho' & 0 \\ 0 & v' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v' & -\rho'/\rho_0^2 \\ 0 & 0 & \gamma p' & v' \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Or, on peut écrire

$$A' \frac{\partial U_0}{\partial x} + B' \frac{\partial U_0}{\partial y} = C_0 U' \quad (3.28)$$

avec

$$C_0 = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) & \frac{\partial \rho_0}{\partial x} & \frac{\partial \rho_0}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} & \frac{\partial v_0}{\partial x} & \frac{\partial v_0}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial p_0}{\partial x} & \frac{\partial p_0}{\partial y} & \gamma \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

ce qui conduit à la relation

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + (A_0 + A') \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + (B_0 + B') \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} + C_0 U' = 0. \quad (3.30)$$

3.5.3 Validité du traitement

Ce traitement n'est valable que si la perturbation U' est petite. De plus, afin de nous ramener à un système analogue à (3.3) et d'appliquer simplement la méthode des caractéristiques telles que nous l'avons décrite dans les annexes III.A et III.B, il faut simplifier la relation (3.30) en négligeant le dernier terme, ce qui permet de se ramener à

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + (A_0 + A') \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + (B_0 + B') \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} \simeq 0. \quad (3.31)$$

Cela signifie que l'on peut négliger $C_0 U'$ devant $A_0 \frac{\partial \hat{U}}{\partial x}$ et devant $B_0 \frac{\partial \hat{U}}{\partial y}$. Soient L_0 la taille caractéristique des gradients de U_0 au niveau de la frontière et Λ' la longueur d'onde typique de la perturbation U' , qui est aussi celle de \hat{U} . L'approximation précédente revient à considérer :

$$\frac{\|C_0 U'\|}{\|A_0 \frac{\partial \hat{U}}{\partial x}\|} = \frac{\|C_0 U'\|}{\|A_0 \frac{\partial U'}{\partial x}\|} \simeq \frac{\Lambda'}{L_0} \ll 1 \quad (3.32)$$

d'après (3.29). Ainsi, notre traitement des conditions aux limites est valable si

$$\Lambda' \ll L_0. \quad (3.33)$$

Nous avons déjà évoqué au paragraphe 3.5.2 la signification physique des variables \hat{U} et U' . Rappelons simplement ici que :

1. Λ' n'est pas forcément la longueur d'onde sonore λ ;
2. L_0 n'est pas forcément lié à la taille caractéristique de l'écoulement L : dans le cas d'un tourbillon axisymétrique de circulation Γ , le champ de vitesse, à une distance r du cœur, a pour expression

$$\|\vec{v}\| = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.34)$$

et donc $L_0 \simeq r$.

3.5.4 Implémentation numérique

Dans le cadre de validité de l'approximation (3.33), nous pouvons ramener le problème du traitement des conditions aux limites à la résolution sur les frontières du domaine de la relation

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + (A_0 + A') \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + (B_0 + B') \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} = 0. \quad (3.35)$$

À ce stade, plusieurs implémentations numériques de la procédure de calcul des conditions aux limites sont possibles pour la résolution de (3.35) :

- I₁** : résolution complète du système (3.35). Dans ce cas, on ne fait que les hypothèses $\Lambda' \ll L_0$ et $\rho' \ll \rho_0$;
- I₂** : linéarisation de la relation (3.35) au premier ordre en perturbations, ce qui conduit à résoudre

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + B_0 \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} = 0. \quad (3.36)$$

Il s'agit simplement des équations de la dynamique des fluides linéarisées autour de l'écoulement moyen. Le traitement que nous proposons ici est une généralisation à des écoulements non uniformes de la formulation de Colonius *et al.* [CLM93]. On suppose dans ce cas, en plus de l'hypothèse $\Lambda' \ll L_0$, que la perturbation U' est petite devant l'écoulement moyen U_0 ;

I₃ : on décompose les matrices A' et B' par rapport à l'état de référence :

$$A' = \hat{A}_0 - A_{0_{ref}} \quad (3.37)$$

avec

$$\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} \hat{u} & \hat{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u} & 0 & -\hat{\rho}/\rho_0^2 \\ 0 & 0 & \hat{u} & 0 \\ 0 & \gamma \hat{p} & 0 & \hat{u} \end{pmatrix} \quad A_{0_{ref}} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{ref} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_{ref}/\rho_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma p_{ref} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

l'indice ₀ rappelant la présence de ρ_0 . La décomposition est analogue pour B' en s'inspirant de la définition (3.27).

Si la frontière du domaine de calcul se situe dans une zone où on a physiquement de petites perturbations U' et où la masse volumique de l'écoulement moyen est très proche de celle du fluide au repos

$$\rho \simeq \rho_{ref} \quad \text{et} \quad \rho_0 \simeq \rho_{ref} \quad (3.39)$$

alors

$$\underbrace{\rho}_{\simeq \rho_{ref}} = \underbrace{\rho_0}_{\simeq \rho_{ref}} + \hat{\rho} - \rho_{ref} \implies \hat{\rho} \simeq \rho \simeq \rho_{ref} \quad (3.40)$$

d'où

$$\hat{A}_0 \simeq \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{u} & \hat{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u} & 0 & -\hat{\rho}/\hat{\rho}^2 \\ 0 & 0 & \hat{u} & 0 \\ 0 & \gamma \hat{p} & 0 & \hat{u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{B}_0 \simeq \hat{B} \quad (3.41)$$

ce qui permet de résoudre sur les frontières du domaine de calcul la relation

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \hat{A} \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + \hat{B} \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} = 0. \quad (3.42)$$

Remarque : les implémentations I_1 et I_3 sont strictement équivalentes si l'écoulement moyen est au repos sur la frontière du domaine : on a alors $A_0 = A_{ref}$ et $B_0 = B_{ref}$.

3.5.5 Mise en pratique

L'algorithme CL₂ utilisé résulte du choix de l'implémentation I_3 présentée ci-dessus : nous avons appliqué la méthode des caractéristiques détaillée au paragraphe 3.3 à la relation (3.42) avec des conditions aux limites « frontière ouverte non-réfléchissante » sans correction de pression, (relations (3.12) et (3.13)), ou des conditions aux limites « émetteur sonore non-réfléchissant » (relations (3.15) et (3.16)).

Le champ U_0 est choisi comme l'état à l'instant $t = 0$ de la simulation numérique (voir la figure III.2). Ainsi, ce champ peut évoluer au cours de la simulation. Cette évolution

a notamment lieu via la génération d'ondes sonores de longueur d'onde $\lambda_0 \geq L$ puisque l'écoulement est compressible. Comme nous l'avons déjà signalé, ces ondes sont contenues dans le terme perturbatif \hat{U} , ce qui conduit, en l'absence de source sonore indépendante, à $\Lambda' \simeq \lambda_0$, ce qui permet une vérification aisée du critère (3.33).

La décomposition par rapport à un état de référence stationnaire présente l'avantage de ne traiter que les termes perturbatifs, et donc de pouvoir s'affranchir de la condition (3.19) pour stabiliser l'écoulement moyen U_0 . On peut ainsi se ramener, moyennant quelques limitations, à un problème de conditions aux limites portant uniquement sur les variables fluctuantes, qui contiennent les quantités sonores. On applique alors à ce problème le traitement des conditions aux limites décrit au paragraphe 3.3 avec des frontières ouvertes non-réfléchissantes et un émetteur sonore plan non-réfléchissant sur la frontière Ouest du domaine de calcul.

Rappelons ici les conditions de validité du traitement des conditions aux limites I_3 que nous avons choisi d'appliquer dans l'algorithme CL_2 :

- en posant L_0 la taille caractéristique des gradients de U_0 au niveau de la frontière et Λ' la longueur d'onde typique de la perturbation U' , il faut que $\Lambda' \ll L_0$;
- la perturbation U' doit rester petite devant l'écoulement moyen U_0 ;
- la masse volumique de l'écoulement moyen U_0 doit être, au voisinage de la frontière considérée, proche de l'état de repos : $\rho_0 \simeq \rho_{ref}$.

Nous verrons aux paragraphes 4 et 5 que ce choix de décomposition et les approximations correspondantes pour l'application de CL_2 sont tout à fait raisonnables pour les écoulements que nous souhaitons étudier et sur les temps de simulation choisis, même s'il existe quelques limitations dans le cas d'écoulements à circulation non nulle pour lesquels le champ de vitesse prend la forme (3.34) près des frontières du domaine.

3.6 Conclusion

Nous avons abordé dans ce paragraphe l'ultime étape de la réalisation d'une simulation numérique satisfaisante de l'interaction son-écoulement en détaillant la procédure de mise en œuvre du traitement des conditions aux limites du problème physique. Nous avons pour cela développé un nouvel algorithme permettant de traduire numériquement la présence de frontières non-réfléchissantes pour les ondes sonores en présence d'un écoulement moyen non uniforme. Nous verrons au paragraphe 5 que ce type de traitement des conditions aux limites est tout à fait satisfaisant dans le cadre de la modélisation de l'interaction son-écoulement [BAE00].

Nous pouvons maintenant résumer la procédure de calcul d'une itération temporelle : partant de la valeur U_i^n des champs au point i et U_F^n sur les frontières du domaine à l'instant t , la figure III.5 résume une passe spatiale L_x^\pm ou L_y^\pm permettant d'aboutir aux valeurs U_i^{n+1} et U_F^{n+1} à l'instant $t + \Delta t/4$.

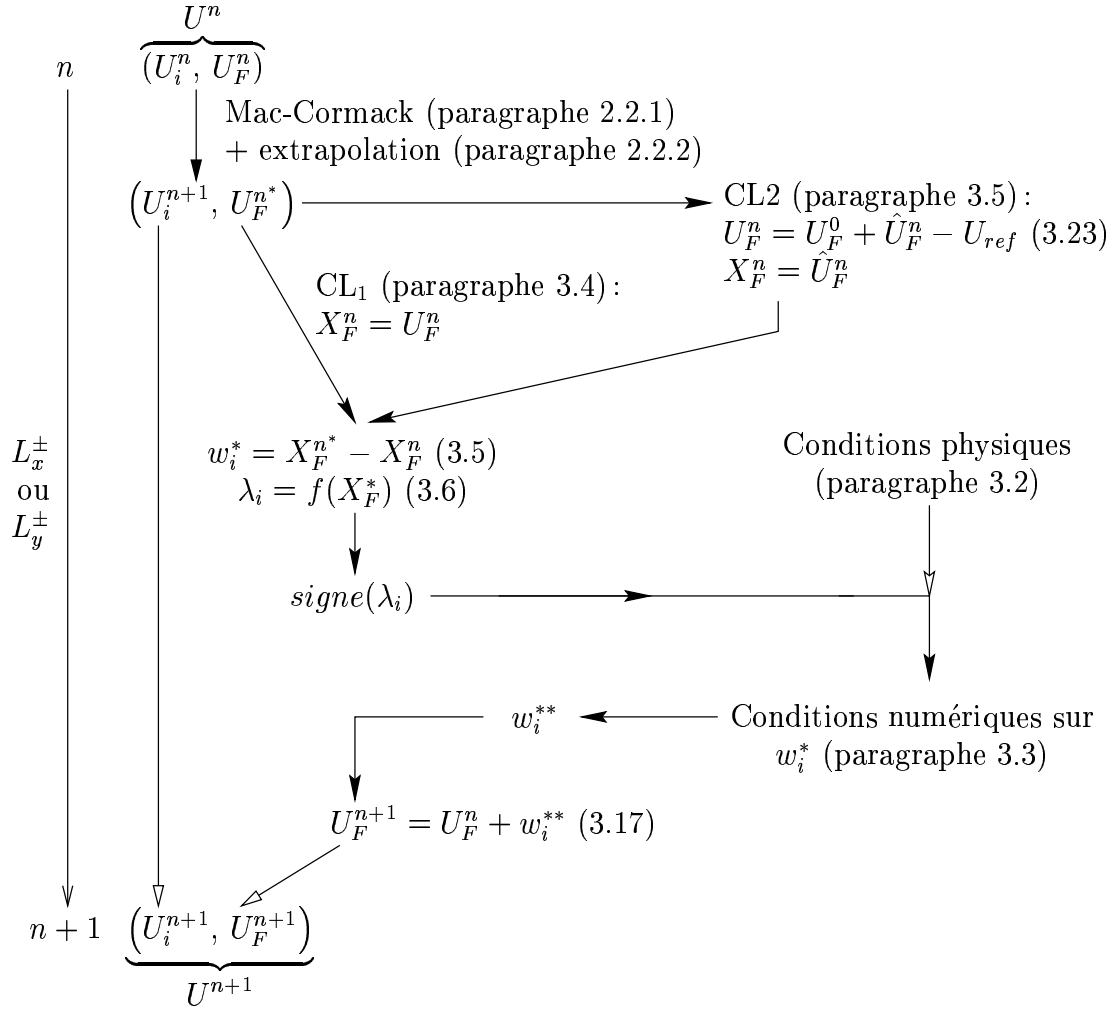


FIG. III.5 – Analyse complète d'une passe de l'algorithme de calcul.

4. Quelques tests classiques

4.1 Introduction

Nous présentons dans ce paragraphe quelques tests académiques de validation de la simulation numérique. Tous ces tests sont en relation directe avec le problème de diffusion du son que nous souhaitons résoudre et nous permettent de caractériser les propriétés de l'algorithme décrit précédemment (voir schéma III.5). Il nous faut pour cela nous intéresser aux propriétés du code vis-à-vis de l'évolution de l'écoulement moyen et vis-à-vis de la propagation des ondes sonores :

- Obtention de l'état stationnaire (test 4.2) : ce test permet de valider le code pour obtenir un écoulement stationnaire, qui sera l'écoulement de base pour le processus de diffusion du son et pour le traitement des conditions aux limites (étape a de la procédure décrite sur la figure III.1). Il s'agit d'une propriété importante de la simulation numérique, car l'ensemble des champs caractérisant certains des écoulements que nous étudions n'est pas connu (c'est le cas du dipôle de vorticité étudié au paragraphe 2 du chapitre IV) ;
- Évolution temporelle de l'écoulement moyen (test 4.3) : ce test permet l'étude de l'évolution au cours de la simulation de l'interaction son-écoulement de l'écoulement moyen. Nous montrons ainsi que l'effet de la dissipation numérique sur l'écoulement de base au cours des simulations de l'étape b de la procédure décrite sur la figure III.1 est faible ;
- Propagation d'ondes sonores dans un milieu au repos (test 4.4) : nous testons ici la dispersion numérique et la dissipation numérique engendrées par le code. Puisque l'on s'intéresse à des phénomènes ondulatoires, il est important de quantifier ces deux paramètres afin d'étudier le comportement du schéma intérieur vis-à-vis de la propagation des ondes sonores, bien qu'il ait déjà été utilisé avec succès pour des simulations numériques d'aéroacoustique [Gam96] ;
- Choix de l'algorithme de calcul CL_2 (tests 4.5) : nous étudions ici les différentes implémentations de la procédure CL_2 de conditions aux limites développée au paragraphe 3.5 et les limitations du choix de l'implémentation I_3 que nous avons fait au paragraphe 3.5.4 ;

- Validité du traitement des conditions aux limites (tests 4.6) : nous avons déjà mentionné que le traitement des frontières du domaine joue un rôle capital dans la simulation numérique de la diffusion du son par la vorticité. Ainsi, nous avons      particul  rement attentifs à quantifier les réflexions parasites sur les frontières du domaine, avec les deux types de conditions aux limites décrites au paragraphe 3.3.3.

4.2   coulement stationnaire

Nous avons effectué un test avec un tourbillon à circulation non nulle, le résultat numérique final que nous considérons comme l'état stationnaire étant comparé au résultat analytique.

On étudie l'évolution d'un vortex d'Oseen de taille caractéristique L et de circulation Γ situé au centre d'un domaine de taille $l_x = l_y$ (nous étudierons l'interaction de ce type d'écoulement avec une onde sonore au chapitre V). Ce tourbillon est l'analogue, dans le cas d'un écoulement non visqueux, du vortex de Burgers ([Bat94], paragraphe 4.5)

La vitesse et la vorticité de ce tourbillon s'expriment :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp \left[-\alpha \frac{r^2}{L^2} \right] \right) \hat{\theta} \quad (4.1)$$

$$\vec{w}(\vec{r}) = \frac{\Gamma\alpha}{\pi L^2} \exp \left[-\alpha \frac{r^2}{L^2} \right] \hat{z} \quad (4.2)$$

où $\alpha \simeq 1.256431$ afin que la vitesse soit maximale en $r = L$, $\hat{\theta}$ et \hat{z} étant respectivement le vecteur orthoradial et le vecteur selon $z'z$ des coordonnées cylindriques. Ce vortex est solution des équations d'Euler compressibles et de conservation de la masse, avec des champs de pression et de masse volumique :

$$p(\vec{r}) = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[1 - \frac{(\gamma - 1)\Gamma^2}{4\pi^2 c^2 r^2} f \left(\alpha \frac{r^2}{L^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.3)$$

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \quad (4.4)$$

où p_0 et ρ_0 sont la pression et la masse volumique au repos et $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ la vitesse du son dans le milieu au repos (voir le paragraphe 2.2 du chapitre V). La fonction f a pour expression

$$f(x) = 0.5 - \exp(x) + 0.5 \exp(-2x) + x Ei(1, x) - x Ei(1, 2x) \quad (4.5)$$

avec $Ei(1, x)$ la fonction exponentielle intégrale défini par :

$$Ei(n, x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-xt)}{t^n} dt \quad \text{pour } x > 0 \quad (4.6)$$

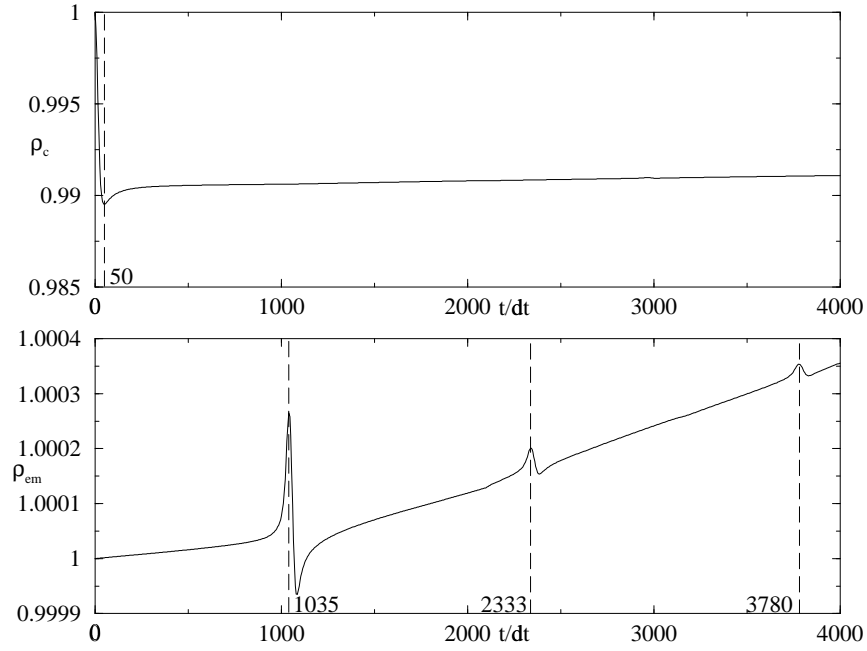


FIG. III.6 – Masse volumique (en kg.m^{-3}) ρ en fonction de t/dt , dans le cas de l'écoulement engendré par un tourbillon d'Oseen : ρ_c au centre du domaine (graphe du haut) et ρ_{em} au milieu de la frontière Est (graphe du bas).

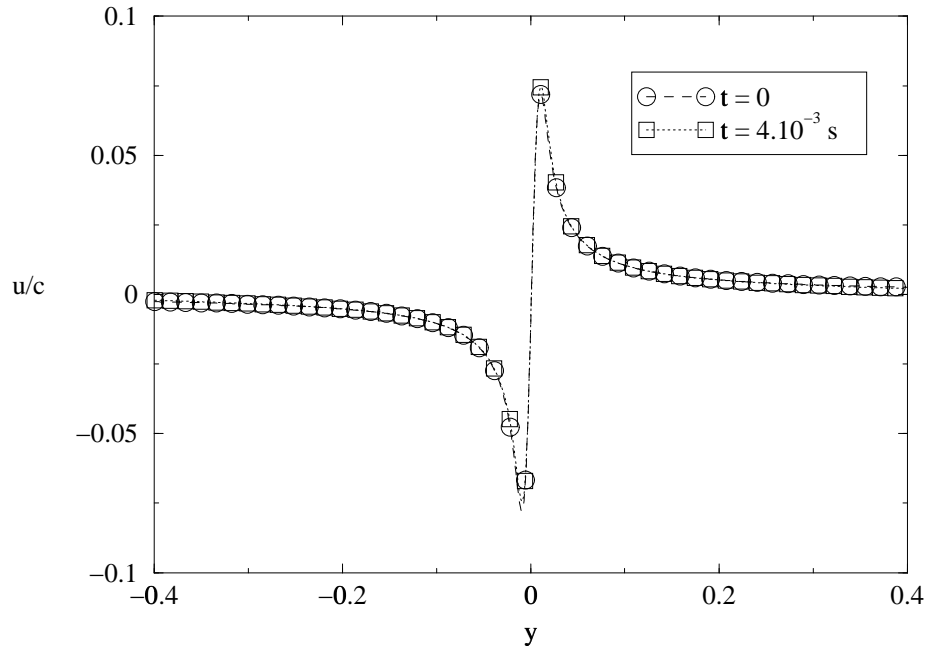


FIG. III.7 – Composante u de la vitesse (en m.s^{-1}) en fonction de y (en mètres), pour le vortex d'Oseen.

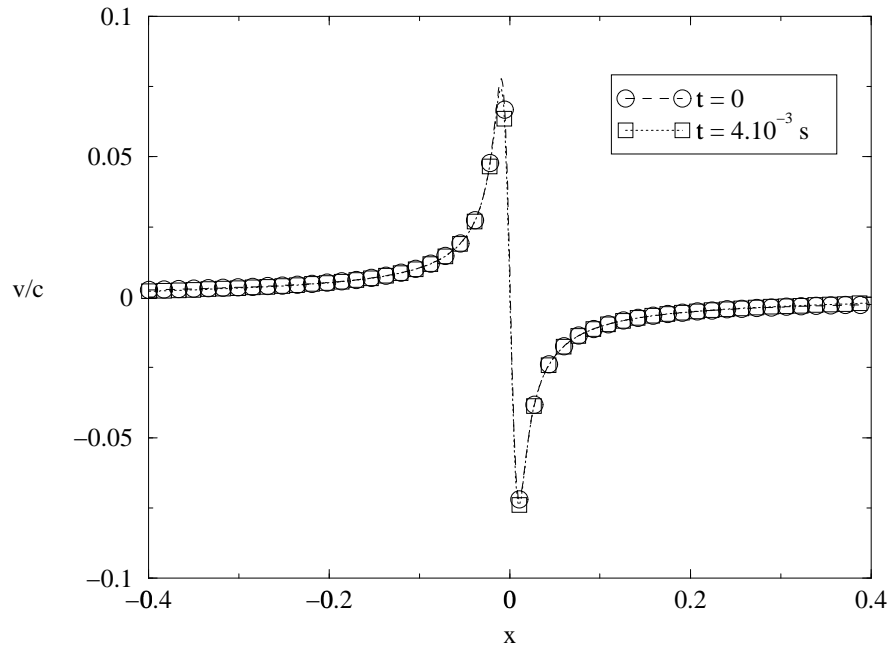


FIG. III.8 – Composante v de la vitesse (en m.s^{-1}) en fonction de x (en mètres), pour le vortex d'Oseen.

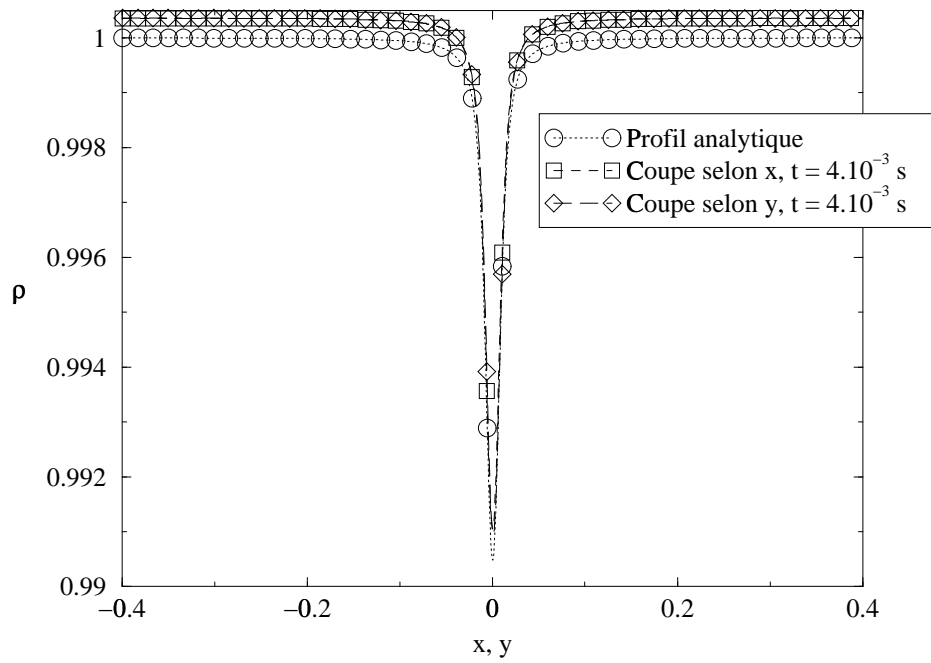


FIG. III.9 – Masse volumique (en kg.m^{-3}) ρ en fonction de x et y (en mètres), pour le vortex d'Oseen.

La condition initiale imposée est le champ de vitesse (4.2), la pression et la masse volumique de l'écoulement étant celle du repos. Les paramètres du calcul sont $\Gamma = 2.50 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ($\mathcal{M} = 7.91.10^{-2}$), $L = 0.01 \text{ m}$, $l_x = 0.8 \text{ m} = l_y$ et un pas de maillage $\Delta = 7.81.10^{-4} \text{ m}$ correspondant à un maillage de 1024×1024 points (configuration A1 décrite au paragraphe 1.2) et un pas de temps $dt = 10^{-6} \text{ s}$. Chaque frontière est traitée de manière non-réfléchissante, avec la condition (3.19) (algorithme CL_1 de traitement des conditions aux limites décrit au paragraphe 3.4). La taille du domaine de calcul est ici fixée par les conditions que nous avons rappelées au paragraphe 3.5.5, afin de pouvoir utiliser l'écoulement stationnaire obtenu comme état de référence dans le cadre de la diffusion du son (voir aussi le paragraphe 4.5).

Les séries temporelles III.6 présentent l'évolution de la masse volumique de l'écoulement au centre du domaine de calcul (ρ_c) et au milieu de la frontière Est du domaine de calcul (ρ_{em}). L'écoulement étant compressible, la dépression au centre du tourbillon est créée dès les premières itérations avec production d'une onde sonore de longueur d'onde $\lambda = cT \simeq 380 \times 50.10^{-6} \text{ s} \simeq 0.02 \text{ m}$, ce qui correspond à la taille caractéristique du cœur du tourbillon. Cette onde sonore non linéaire, cylindrique, se propage en se déformant (à cause de la faible dispersion numérique) dans le domaine de calcul et atteint le milieu de la frontière Est à l'instant $t/dt = 0.4/380 \simeq 1052$, ce qui est bien conforme à l'évolution de ρ_{em} . On note également la présence d'ondes sonores engendrées par les autres frontières du domaine à cause de la correction de pression (3.19) et qui correspondent à la traversée du domaine de calcul depuis les frontières Nord et Sud ($t/dt \simeq 2333$) et depuis la frontière Ouest ($t/dt \simeq 3780$). De plus, pour $t/dt \simeq 4000$, l'écoulement est stationnaire, à la dissipation numérique près (voir le paragraphe 4.3).

Les figures III.7-III.9 montrent des coupes de la composante u (resp. v) de la vitesse selon y (resp. x) ainsi que des coupes selon x et y de la masse volumique de l'écoulement. Comme le montrent les évolutions temporelles, l'état final correspond à un état stationnaire, après 4000 itérations temporelles. Le champ de vitesse final est relativement proche du champ de vitesse imposé par la condition initiale (4.2), la différence, essentiellement présente au niveau des maxima de vitesse, pouvant être attribuée à la dissipation numérique du schéma intérieur. Le profil de masse volumique est bien axisymétrique, et similaire au profil théorique (4.4), à un décalage de la masse volumique de 0.04% loin du cœur par rapport au niveau de référence, qui peut être attribué au fait que les conditions aux limites ne sont pas parfaitement non-réfléchissantes (condition (3.19)), la pression sur les frontières du domaine n'étant alors pas égale à la pression de référence.

4.3 Dissipation numérique de l'écoulement moyen

Nous avons effectué deux tests, avec un tourbillon de Taylor (circulation nulle) et un tourbillon d'Oseen (circulation non nulle).

Nous avons détaillé précédemment l'écoulement dû à un tourbillon d'Oseen. Nous nous contenterons ici de rappeler la forme des champs de vorticité et de vitesse d'un vortex de Taylor, dont la structure est détaillée au paragraphe 1.2.1 du chapitre IV : la vorticité de

ce tourbillon s'exprime

$$\vec{\Omega}(r) = \Omega_0 \left(2 - (r/L_1)^2\right) \exp\left[\frac{1 - (r/L_1)^2}{2}\right] \hat{z} \quad (4.7)$$

et son champ de vitesse a pour expression

$$\vec{v}(r) = \Omega_0 r \exp\left[\frac{1 - (r/L_1)^2}{2}\right] \hat{\theta}. \quad (4.8)$$

Les simulations numériques ont dans les deux cas été effectuées avec un maillage de pas constant de 1024×1024 points pour un domaine de calcul de taille $l = 0.8 m$ (configuration A1 décrite au paragraphe 1.2) et un pas de temps $dt = 10^{-6} s$. Les paramètres des écoulements sont

- $\mathcal{M} \simeq 0.16$ et $L = 0.01 m$ pour le vortex de Taylor ;
- $\Gamma \simeq 2.50 m^2.s^{-1}$, $\mathcal{M} \simeq 7.91.10^{-2}$ et $L = 0.01 m$ pour le vortex d'Oseen.

Chaque frontière est traitée de manière non-réfléchissante, avec l'implémentation I_3 de l'algorithme CL_2 de traitement des conditions aux limites décrit au paragraphe 3.5 : émetteur sonore non-réfléchissant n'émettant pas d'ondes sonores au niveau de la frontière Ouest, les trois autres frontières étant traitées comme ouvertes et non-réfléchissantes. La frontière Ouest est alors numériquement équivalente aux trois autres frontières, puisque l'émetteur sonore n'émet pas.

Les séries temporelles III.10 (resp. III.11) présentent l'évolution de la masse volumique de l'écoulement au centre du domaine de calcul (ρ_c) et au milieu de la frontière Est du domaine de calcul (ρ_{em}), dans le cas de l'écoulement de Taylor (resp. d'Oseen).

Sans faire une description quantitative sur le schéma numérique III.5, on constate pour chacun des deux écoulements une dissipation numérique, aussi bien au centre du domaine de calcul (ρ_c) que sur la frontière Est (ρ_{em}). La dissipation numérique est clairement visible dans la seconde partie des évolutions temporelles, la première partie (avant la rupture de pente) correspondant à l'adaptation de la condition initiale numérique (à partir de la solution analytique et des conditions aux limites CL_1) aux nouvelles conditions aux limites CL_2 . Cette dissipation numérique est inférieure à 0.1% mais nécessite cependant de prendre en compte l'évolution temporelle de l'écoulement moyen (voir figure III.2) pour une étude précise de l'interaction son-écoulement, même s'il s'agit d'un écoulement stationnaire.

4.4 Dispersion et atténuation numérique des ondes

Afin d'étudier le comportement du modèle numérique pour la propagation des ondes acoustiques, nous avons évalué la dispersion et l'atténuation numérique d'une onde plane

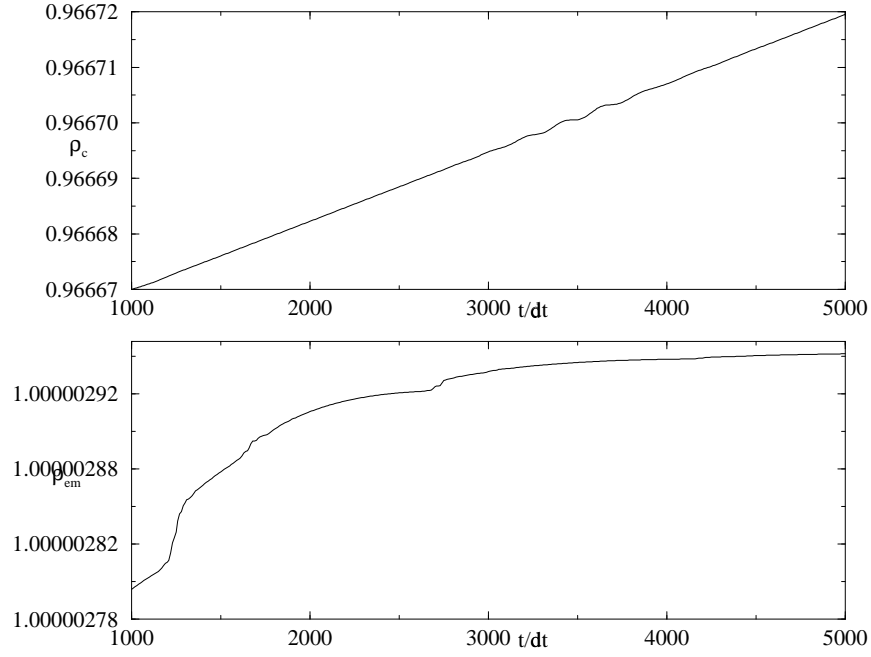


FIG. III.10 – Évolution de la masse volumique (en kg.m^{-3}) de l'écoulement de Taylor en fonction de t/dt : ρ_c au centre du domaine (graphe du haut) et ρ_{em} au milieu de la frontière Est (graphe du bas).

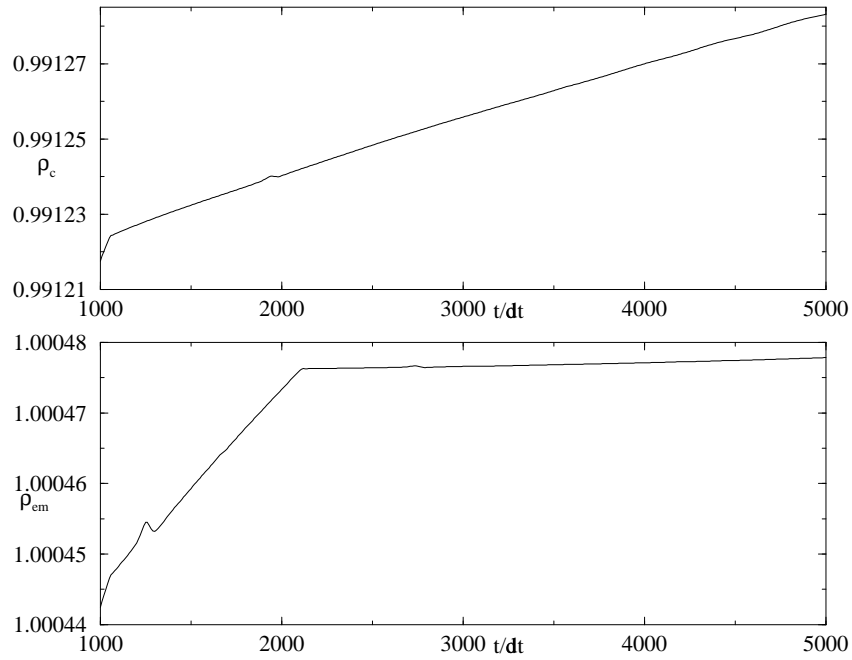


FIG. III.11 – Évolution de la masse volumique (en kg.m^{-3}) de l'écoulement d'Oseen en fonction de t/dt : ρ_c au centre du domaine (graphe du haut) et ρ_{em} au milieu de la frontière Est (graphe du bas).

monochromatique de fréquence variable $\nu = 1/T$ (T représente ici la période sonore) :

$$\begin{cases} \rho_s &= \rho_{0s} \cos[2\pi(\nu t - x/\lambda)] \\ \vec{v}_s &= u_{0s} \sin[2\pi(\nu t - x/\lambda)] \hat{x}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Nous avons choisi un domaine de taille $l_x = 0.1 \text{ m}$, $l_y = 0.01 \text{ m}$ correspondant à un maillage de 128×16 points (pas d'espace $\Delta = 7.81 \cdot 10^{-4} \text{ m}$) et $\rho_0 = 2.63 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^{-3}$ afin d'émettre des ondes sonores linéaires. Les conditions aux limites sont un émetteur sonore non-réfléchissant à l'ouest et des frontières ouvertes parfaitement non-réfléchissantes sur les trois autres bords du domaine (paragraphe 3.3.3). Il n'est pas nécessaire d'effectuer la correction de pression (3.19) puisqu'il n'y a pas d'écoulement moyen. L'onde émise étant plane et se propageant selon les x croissants, les réflexions sur les frontières sont négligeables. En effet, $v_y = 0$ dans tout le domaine et l'onde sonore atteint la frontière Est sous incidence normale, ce qui est le cas le plus favorable pour notre traitement des conditions aux limites. Après l'instauration d'un régime permanent, on mesure la longueur d'onde λ à l'aide d'une coupe de la masse volumique de l'onde sonore à $y = C^{\text{te}}$. On calcule également le facteur de transmission $\tau = \rho_{0s}(l_x, l_y/2)/\rho_{0s}(1, l_y/2)$, indépendant de y puisque l'onde sonore est plane.

La figure III.12 présente une comparaison entre la relation de dispersion numérique $\lambda_{\text{num}} = cT$ et la relation de dispersion théorique $\lambda_{\text{th}} = cT$ avec $c = 380 \text{ m.s}^{-1}$ (célérité du son dans l'air assimilé à un gaz parfait $\rho_0 = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ et $p_0 = 1.03 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) : le choix d'échelles logarithmiques permet une meilleure analyse du phénomène. On constate un très bon accord entre les deux relations tant que le nombre de points par longueur d'onde n_x reste supérieur à 12 points ($\lambda \simeq 0.01 \text{ m}$). Cependant, l'accord est encore raisonnable pour des longueurs d'onde de l'ordre de $7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, i.e environ 8 points de maillage par longueur d'onde. Cette analyse est confirmée par la figure III.13 qui présente l'erreur relative $(\lambda_{\text{th}} - \lambda_{\text{num}})/\lambda_{\text{th}}$ en fonction de λ_{th} : l'erreur reste de l'ordre de 1% pour $\lambda \geq 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

La figure III.14 montre l'évolution du facteur de transmission τ , qui caractérise l'atténuation numérique, en fonction de la longueur d'onde λ_{th} . Le schéma numérique possède une très faible dissipation tant que le nombre de points de maillage par longueur d'onde reste supérieur à 25 points ($\lambda \simeq 0.02 \text{ m}$). Contrairement à la relation de dispersion, qui restait valable sur une large gamme de nombre de points par longueur d'onde, l'atténuation augmente très rapidement lorsque λ diminue : $\tau = 0.97$ pour $\lambda = 0.01 \text{ m}$, et pour $\lambda = 7.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\tau = 0.87$.

Le critère déterminant pour une résolution correcte des phénomènes propagatifs avec l'algorithme de Mac-Cormack semble donc être la dissipation numérique des ondes sonores. Ainsi, on peut estimer que les phénomènes sonores sont correctement résolus par le modèle numérique pour un minimum de 12 points de maillage par longueur d'onde, ce qui correspond, avec les paramètres précédents, à $\lambda \geq 0.01 \text{ m}$: l'atténuation reste alors relativement faible.

Pour s'en assurer, nous avons refait la simulation précédente avec les mêmes paramètres, mais avec un domaine de calcul de taille $l'_x = 0.8 \text{ m}$ correspondant à un maillage

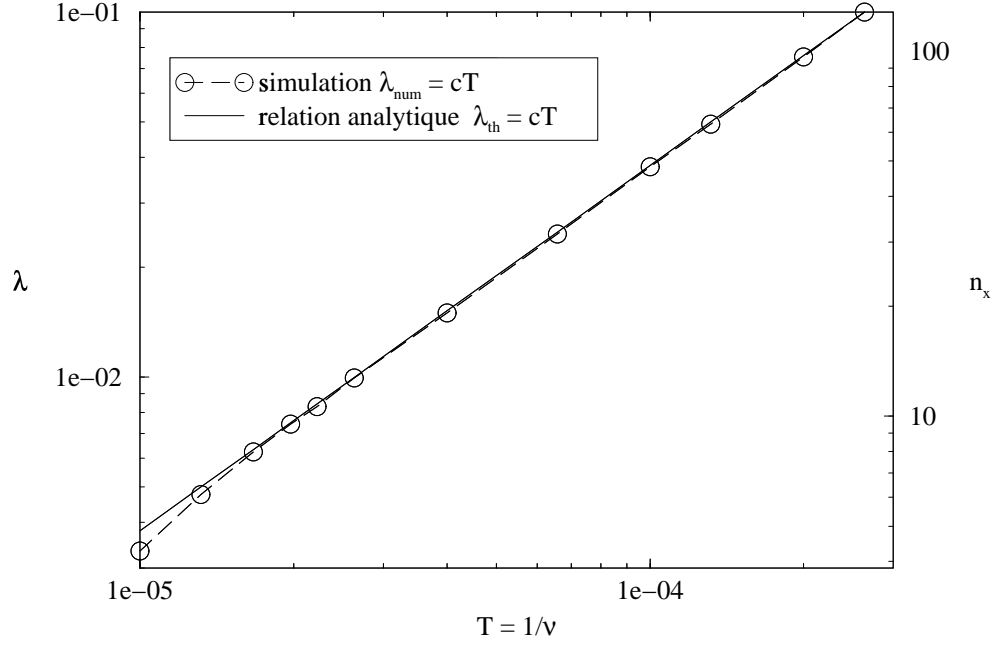


FIG. III.12 – Relation de dispersion des ondes sonores: λ (en mètres) en fonction de $T = 1/\nu$ (en secondes) en échelle logarithmique (l'échelle des ordonnées de droite représente le nombre de points de maillage n_x par longueur d'onde sonore).

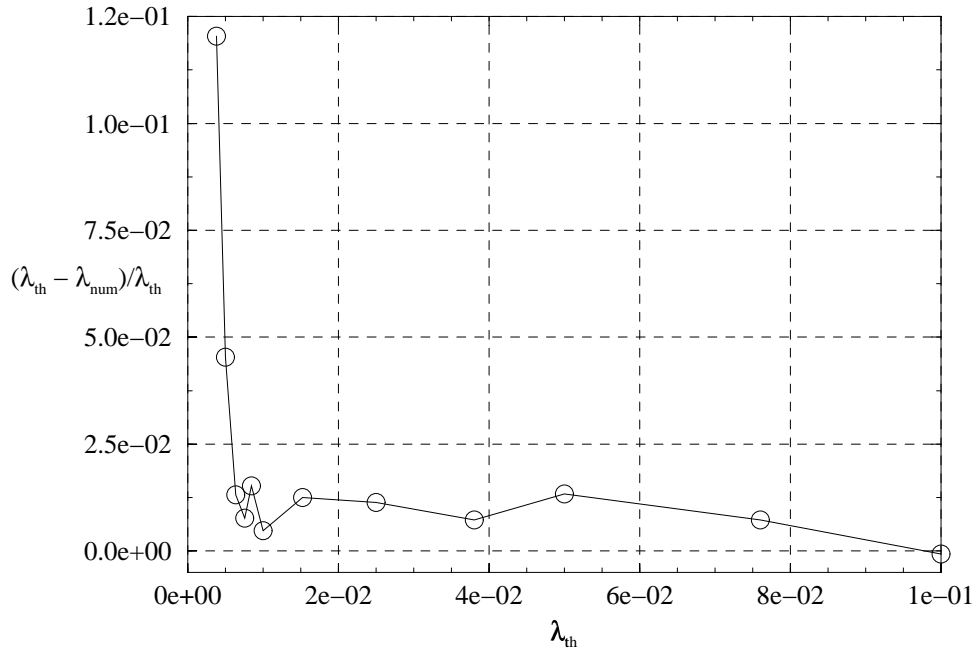


FIG. III.13 – Erreur relative dans la relation de dispersion: $(\lambda_{\text{th}} - \lambda_{\text{num}})/\lambda_{\text{th}}$ en fonction de λ_{th} (en mètres).

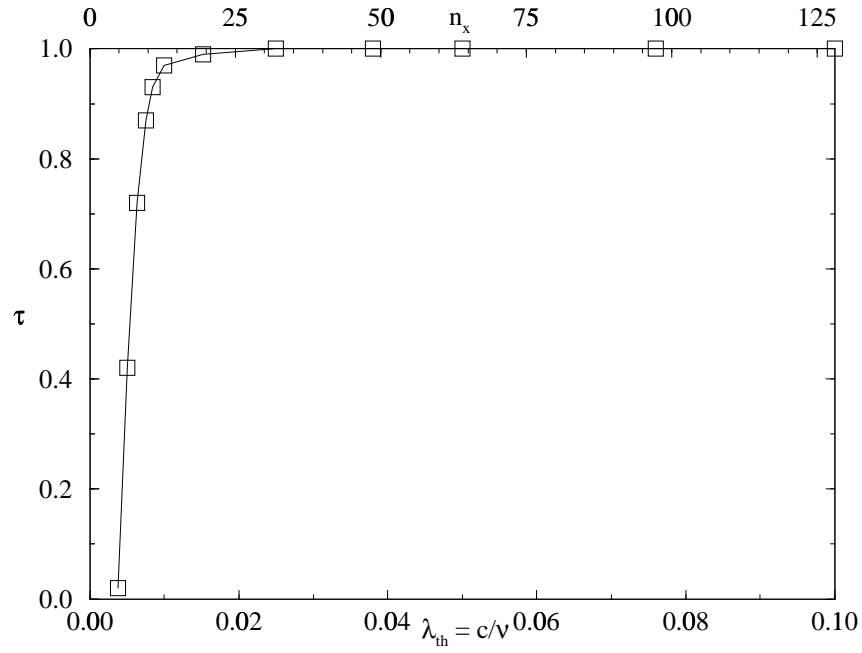


FIG. III.14 – *Dissipation numérique de la simulation pour la propagation des ondes sonores: τ en fonction $\lambda_{th} = c/\nu$ (en mètres); l'échelle des abscisses du haut représente le nombre de points de maillage n_x par longueur d'onde sonore.*

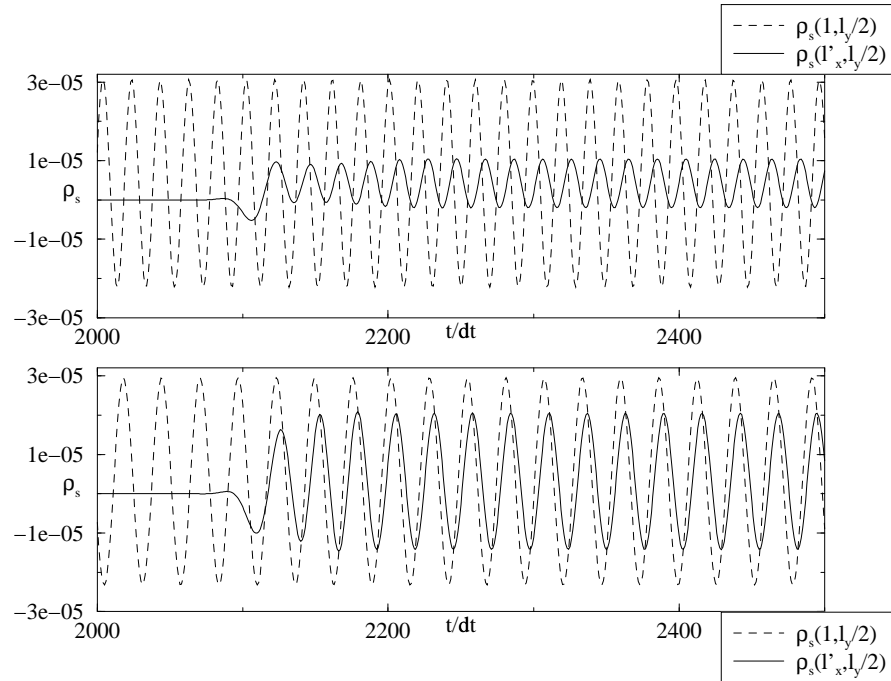


FIG. III.15 – *Dissipation numérique lors de la propagation des ondes sonores: $\rho_s(1, l_y/2)$ et $\rho_s(l_x, l_y/2)$ en fonction de t/dt pour $\lambda_1 = 0.01\text{ m}$ (figure du bas) et $\lambda_2 = 0.0075\text{ m}$ (figure du haut).*

de 1024×16 points et pour les longueurs d'onde $\lambda_1 = 0.01 m$ et pour $\lambda_2 = 7.5 \cdot 10^{-3} m$. La figure III.15 montre l'évolution temporelle de la densité sonore aux points $\rho_s(1, l_y/2)$ et $\rho_s(l'_x, l_y/2)$ pour les longueurs d'onde λ_1 et λ_2 . La propagation ayant lieu sur une distance plus grande, l'atténuation est plus forte :

$$\tau_1(l'_x) = 0.66 \quad \text{et} \quad \tau_2(l'_x) = 0.23 \quad (4.10)$$

ce qui confirme l'estimation précédente : il faut bien au moins 12 points de maillage par longueur d'onde afin de décrire de manière satisfaisante la propagation d'ondes sonores dans un milieu non dissipatif : la dispersion est alors inférieure à 1% et l'on estime correctement l'amplitude des ondes sonores.

Nous avons utilisé le critère établi ci-dessus dans l'ensemble des simulations numériques de l'interaction son-écoulement : dans la mesure du possible, nous avons essayé de modéliser les phénomènes propagatifs, qui sont monochromatiques, avec un minimum de 12 points de grille par longueur d'onde.

4.5 Choix de l'implémentation de l'algorithme CL₂

Nous discutons dans ce paragraphe de la validité et des limitations du choix de l'implémentation I_3 pour l'algorithme de conditions aux limites CL₂. Pour cela, nous avons effectué des tests avec les vortex de Taylor et d'Oseen dont nous avons déjà présenté la structure aux paragraphes précédents. Ces deux vortex présentent une différence fondamentale dans leur champ de vitesse : la vitesse décroît en $1/r$ pour un vortex d'Oseen alors que le vortex de Taylor, de circulation nulle, possède un champ de vitesse spatialement localisé (voir les figures IV.2 au chapitre IV et V.2 au chapitre V). Ainsi, les approximations liées à l'implémentation I_3 (paragraphe 3.5.5) :

- en posant L_0 la taille caractéristique des gradients de U_0 au niveau de la frontière et Λ' la longueur d'onde typique de la perturbation U' , $\Lambda' \ll L_0$;
- la perturbation U' doit rester petite devant l'écoulement moyen U_0 ;
- la masse volumique de l'écoulement moyen U_0 doit être, au voisinage de la frontière considérée, proche de l'état de repos : $\rho_0 \simeq \rho_{ref}$;

seront beaucoup mieux vérifiées dans le cas d'un vortex de Taylor que dans le cas d'un vortex d'Oseen.

Afin de le vérifier, nous avons effectué des simulations numériques pour les trois implémentations possibles (paragraphe 3.5.4) avec deux domaines de taille $l_1 \times l_1$ (maillage 1 uniforme 256×256 avec $\Delta = 7.81 \cdot 10^{-4} m$) et $l_2 \times l_2$ (maillage 2 uniforme 512×512 avec $\Delta = 7.81 \cdot 10^{-4} m$) et un pas de temps $dt = 10^{-6} s$ dans chaque cas. Les paramètres des deux écoulements sont :

- $\mathcal{M} \simeq 0.16$ et $L = 0.01 m$ pour le vortex de Taylor ;

- $\Gamma \simeq 5.0 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $\mathcal{M} \simeq 0.15$ et $L = 0.01 \text{ m}$ pour le vortex d'Oseen.

Chaque frontière est traitée de manière non-réfléchissante : émetteur sonore non-réfléchissant au niveau de la frontière Ouest, les trois autres frontières étant traitées comme ouvertes et non-réfléchissantes. Lorsque l'émetteur sonore est « branché », il émet des ondes sonores dont la vitesse s'exprime de manière analogue à (3.2) :

$$u_s(\text{Ouest}) = u_{0s} \sin(2\pi\nu t). \quad (4.11)$$

avec $u_{0s} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$, ce qui correspond à une onde plane linéaire entrant dans le domaine de calcul.

Nous avons étudié l'évolution temporelle de la masse volumique de l'écoulement au centre du domaine de calcul (ρ_c) et au milieu de la frontière Est du domaine de calcul (ρ_{em}), pour chaque implémentation et pour chacun des deux maillages :

- ρ_c^1 et ρ_{em}^1 dans le cas du maillage 1 ;
- ρ_c^2 et ρ_{em}^2 dans le cas du maillage 2.

Par souci de clarté, tous les points d'échantillonnage n'ont pas été symbolisés.

La figure III.16 présente l'évolution de la masse volumique ρ_c de l'écoulement seul, pour les trois implémentations possibles et dans le cas des maillages 1 et 2 : hormis quelques différences dues à la différence de taille de domaine entre les deux cas, on ne note pas de différence entre les trois implémentations possibles de l'algorithme CL₂, conformément à l'analyse faite précédemment.

La figure III.17 (resp. III.18) présente l'évolution de la masse volumique ρ_c (resp. ρ_{em}) de l'écoulement seul, pour les trois implémentations possibles et dans le cas des maillages 1 et 2 : pour les deux positions d'enregistrements, les phénomènes observés sont analogues. Les implémentations I₁ et I₂ fournissent des résultats numériquement stables. Par contre, I₃ conduit à une instabilité sur les frontières du domaine de calcul, qui est engendrée plus tardivement dans le cas du maillage 2. En effet, pour un vortex d'Oseen donnée (L et \mathcal{M} fixés), les hypothèses de validité de l'implémentation I₃ ($\rho_0 \simeq \rho_{ref}$ et $\Lambda' \ll L_0$) sont d'autant mieux vérifiées que la taille du domaine de calcul est grande. La source de l'instabilité est bien la présence de l'écoulement moyen, comme le montre la figure III.19 qui présente l'évolution temporelle de ρ_c^1 pour l'implémentation I₃, dans les cas de l'écoulement seul et de la simulation de l'interaction son-écoulement : les pointillés permettant d'estimer le début de l'instabilité numérique sont positionnés aux mêmes instants en l'absence et en présence de l'onde sonore.

Il est donc nécessaire, avec l'implémentation I₃, de choisir de grands domaines de calcul dans le cas de tourbillons à circulation non nulle. Cette contrainte, qui est due à la présence d'un écoulement dont la masse volumique n'est pas suffisamment proche de celle du repos et dont la longueur d'onde des gradients ne satisfait pas la condition $\Lambda' \ll L_0$, n'est présente dans les simulations que nous avons effectuées que dans le cas d'écoulements à circulation non nulle (chapitre IV). Cependant, pour une étude détaillée de l'interaction

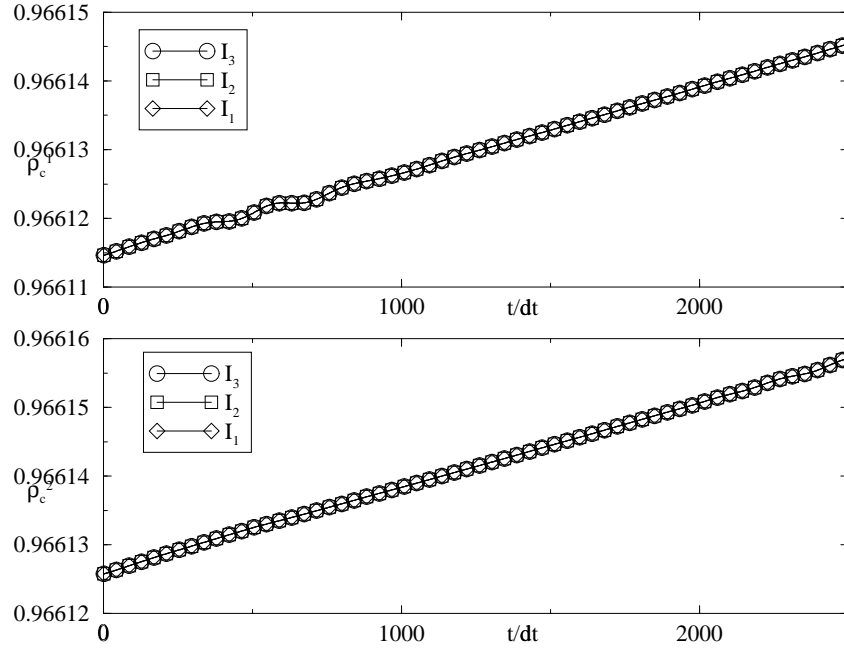


FIG. III.16 – Évolution de la masse volumique (en kg.m^{-3}) au centre du domaine en fonction de t/dt (vortex de Taylor seul) : ρ_c^1 pour un maillage 256×256 (graphe du haut) et ρ_c^2 pour un maillage 512×512 (graphe du bas). \diamond : implémentation I_1 , \square : implémentation I_2 et \circ : implémentation I_3 .

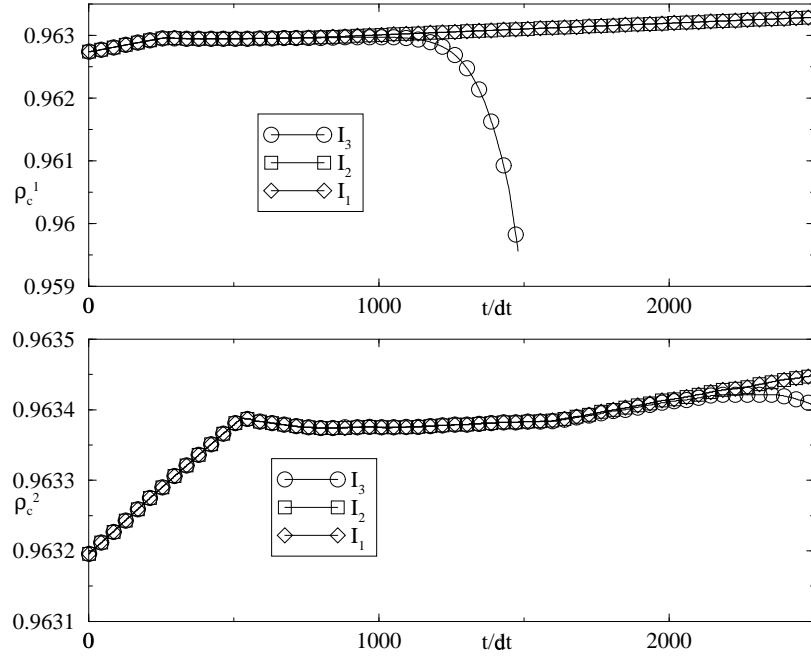


FIG. III.17 – Évolution de la masse volumique (en kg.m^{-3}) au centre du domaine en fonction de t/dt (vortex d'Oseen seul) : ρ_c^1 pour un maillage 256×256 (graphe du haut) et ρ_c^2 pour un maillage 512×512 (graphe du bas). \diamond : implémentation I_1 , \square : implémentation I_2 et \circ : implémentation I_3 .

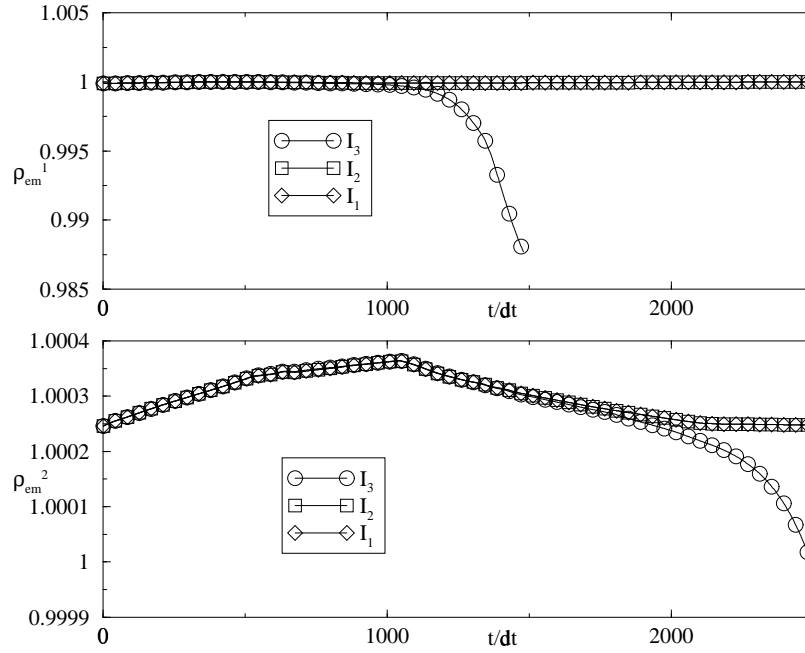


FIG. III.18 – Évolution de la masse volumique (en kg.m^{-3}) au milieu de la frontière Est du domaine en fonction de t/dt (vortex d'Oseen seul) : ρ_{em}^1 pour un maillage 256×256 (graphe du haut) et ρ_{em}^2 pour un maillage 512×512 (graphe du bas). \diamond : implémentation I_1 , \square : implémentation I_2 et \circ : implémentation I_3 .

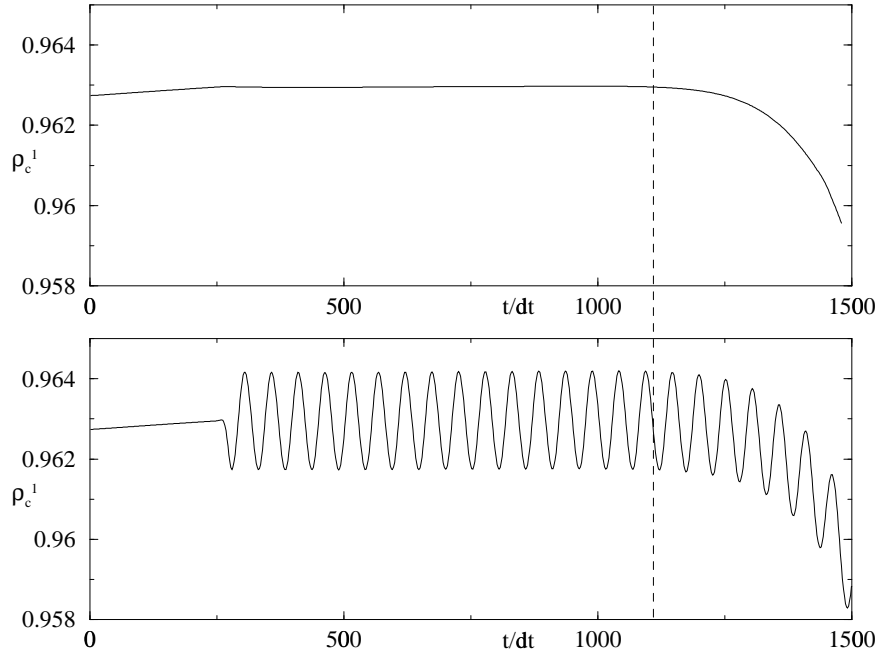


FIG. III.19 – Évolution de la masse volumique ρ_c^1 (en kg.m^{-3}) (maillage 256×256) au centre du domaine en fonction de t/dt pour un vortex d'Oseen avec l'implémentation I_3 : dans le cas de l'écoulement seul (graphe du haut) et dans le cas de l'interaction son-écoulement (graphe du bas).

son-écoulement, il est nécessaire de travailler dans la zone du champ lointain (voir le paragraphe 5) et cette contrainte de « grands domaines » n'est ainsi pas trop difficile à réaliser.

Il est clair, à la vue des résultats précédents, que le choix que nous avons fait de l'implémentation I_3 n'est pas le meilleur. Comme nous l'avons déjà dit, il a été guidé par sa simplicité de mise en œuvre pratique ainsi que par les résultats très acceptables qu'il fournit dans les configurations que nous avons étudiées. Une amélioration évidente de la procédure est l'emploi systématique de l'implémentation I_1 , qui nous permettra ultérieurement d'effectuer des simulations numériques de l'interaction son-écoulement dans le cas de tourbillon à circulation non nulle et avec des nombres de Mach plus élevés.

4.6 Validité des conditions aux limites

Le traitement des conditions aux limites est l'un des points cruciaux des simulations numériques de diffusion du son par la vorticité. Nous avons effectué trois tests afin de mesurer les réflexions, en utilisant les conditions aux limites présentées au paragraphe 3.3.3 (il n'est pas nécessaire ici d'effectuer la correction de pression (3.19) puisqu'il n'y a pas d'écoulement moyen) :

1. un émetteur sonore ponctuel au centre du domaine de calcul et des frontières ouvertes parfaitement non-réfléchissantes ;
2. un émetteur sonore plan non-réfléchissant au niveau de la frontière Ouest et des frontières ouvertes parfaitement non-réfléchissantes sur les trois autres côtés ;
3. un émetteur sonore plan non-réfléchissant au niveau de la frontière Ouest et un émetteur sonore plan au centre du domaine, les trois autres frontières étant traitées de manière parfaitement non-réfléchissantes.

Ces trois tests, bien que très généraux, sont essentiels pour notre problème, car le champ sonore au niveau des frontières du domaine de calcul peut approximativement se décomposer en une onde plane et une onde cylindrique (voir le paragraphe 3.2 du chapitre I). Bien entendu, la modélisation numérique de l'onde diffusée sera d'autant plus fiable que les réflexions parasites sur les parois seront faibles.

Pour chaque test, on emploie l'une des deux configurations présentées sur la figure III.20. Deux simulations numériques sont alors effectuées : la première (resp. la seconde) calcule les quantités physiques dans le domaine 1 de taille $l \times l$ (resp. domaine 2 de taille $2l \times 2l$). On peut alors accéder par exemple à la densité sonore ρ_1 (resp. ρ_2). L'onde réfléchie en un point M quelconque d'une frontière du domaine 1 s'exprime alors :

$$\rho_r(M) = \rho_1(M) - \rho_2(M) \quad (4.12)$$

et le coefficient de réflexion \mathcal{R} s'exprime :

$$\mathcal{R}(M) = \frac{\rho_{0_r}(M)}{\rho_{0_2}(M)} = \frac{\rho_{0_1}(M)}{\rho_{0_2}(M)} - 1 \quad (4.13)$$

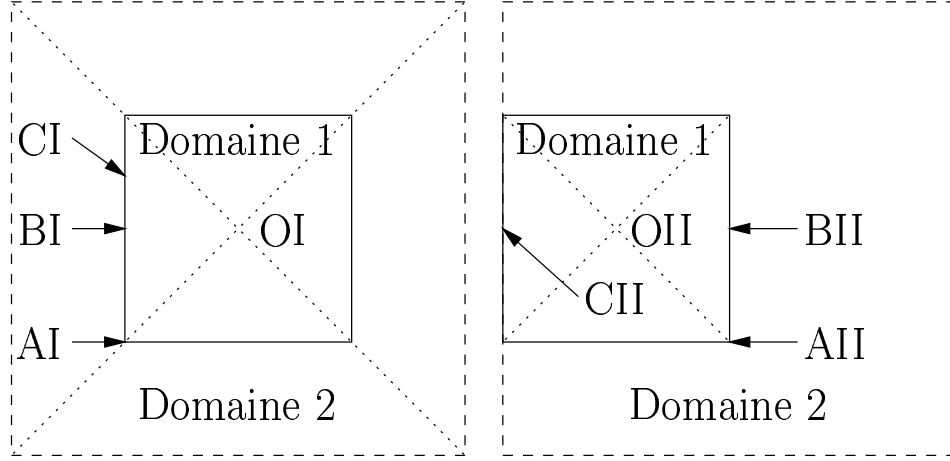


FIG. III.20 – La configuration I utilisée pour le test 1 (à gauche) et la configuration II utilisée pour les tests 2 and 3 (à droite). Les réflexions sont analysées aux points AI, BI et CI ou aux points AII, BII et CII

L'onde réfléchie est analysée en un point (B) au centre d'une frontière et en un point (A) situé au coin de cette même frontière. Au point (B), on peut s'attendre à obtenir de très bons résultats, car les ondes sonores se propagent perpendiculairement à la frontière. Au contraire, les résultats obtenus au point (A) nous permettront d'obtenir une borne supérieure de l'amplitude des réflexions parasites au niveau des frontières. Le point (CI) nous donnera quant à lui une estimation intermédiaire des réflexions parasites tandis que le point (CII) nous permettra d'estimer les réflexions sur la frontière comportant un émetteur plan.

4.6.1 Un émetteur sonore ponctuel

Un émetteur sonore ponctuel est situé au point OI de la configuration I, avec :

$$\rho_s(\text{OI}) = \rho_{0s} \sin(2\pi\nu t). \quad (4.14)$$

Nous avons choisi $l = 0.2 \text{ m}$, $\rho_{0s} = 2.10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}$ afin que les ondes cylindriques sortantes soient linéaires, un pas d'espace $\Delta = 7.81.10^{-4} \text{ m}$ et un pas de temps $dt = 10^{-6} \text{ s}$. Le domaine 1 est discrétisé par un maillage uniforme de 256×256 points et chaque frontière est traitée comme ouverte et parfaitement non-réfléchissante. Des simulations ont été effectuées pour différentes longueurs d'onde $\lambda = c/\nu$ et les ondes réfléchies sont évaluées aux points AI and BI.

Les simulations sont interrompues avant que les ondes réfléchies au voisinage des coins Nord-Ouest et Sud-Ouest (qui sont d'amplitude non négligeable) n'atteignent le point BI, afin de pouvoir faire une analyse précise du comportement de la frontière Ouest. La figure III.21 montre l'effet des ondes réfléchies aux alentours des coins Nord-Ouest et Sud-Ouest du domaine sur l'onde réfléchie aux points BI et CI: l'onde réfléchie dans le coin

Nord-Ouest du domaine arrive à l'instant $t/dt \simeq [(l/2)\sqrt{2} + l/4]/380 \simeq 500$ au point CI et à l'instant $t/dt \simeq [(l/2)\sqrt{2} + l/4]/380 \simeq 635$ au point BI. Ces deux estimations correspondent aux temps repérés sur la figure III.21, car l'onde réfléchie comporte aussi des ondes émises par des points de la frontière proche de ce coin.

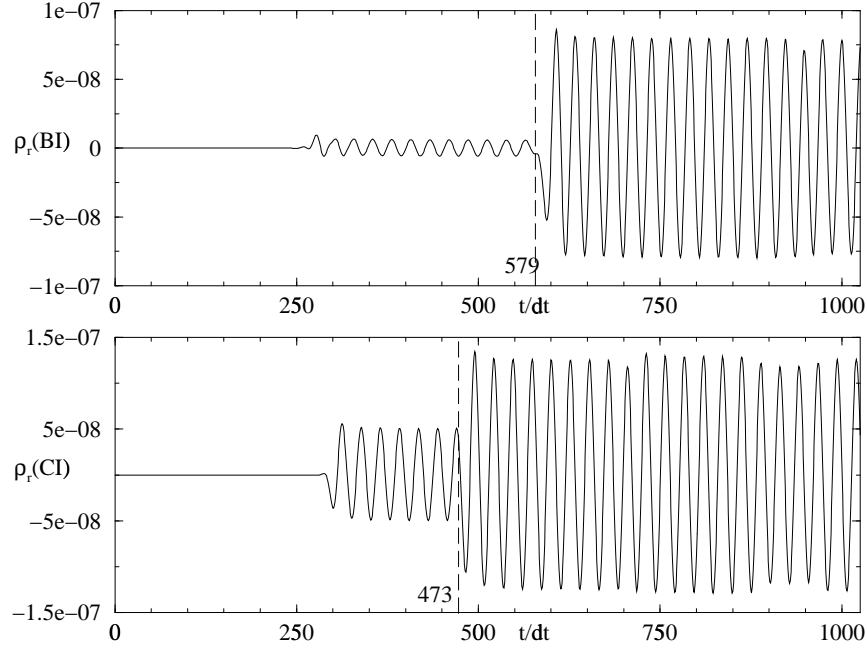


FIG. III.21 – Onde réfléchie (en kg.m^{-3}) $\rho_r(BI)$ en fonction de t/dt pour $\lambda = 0.01 \text{ m}$ (graphe du haut). Onde réfléchie $\rho_r(CI)$ en fonction de t/dt pour $\lambda = 0.01 \text{ m}$ (graphe du bas).

La figure III.22 montre l'évolution temporelle de la masse volumique de l'onde sonore incidente et de l'onde sonore réfléchie au point BI. Après un régime transitoire résultant de la mise en place de la source sonore, le coefficient de réflexion est d'environ 0.6%, ce qui montre l'efficacité de notre procédure pour une onde sous incidence normale à la frontière.

La figure III.23 montre l'évolution temporelle de la masse volumique de l'onde sonore et de l'onde sonore réfléchie au point AI. La situation est ici très différente car l'onde sonore cylindrique n'atteint plus les frontières sous incidence normale. L'amplitude de l'onde réfléchie est ainsi beaucoup plus grande et atteint jusqu'à 38% de l'amplitude de l'onde incidente. Il s'agit de la pire configuration à laquelle nous pouvons être confrontés dans les simulations de diffusion du son.

L'analyse au niveau du point CI montre que l'amplitude de l'onde réfléchie est de l'ordre de 6% de l'amplitude de l'onde incidente.

Ces résultats ne dépendent pas de la longueur d'onde incidente λ (voir le tableau récapitulatif au paragraphe 4.6.4, où nous reviendrons sur ce point).

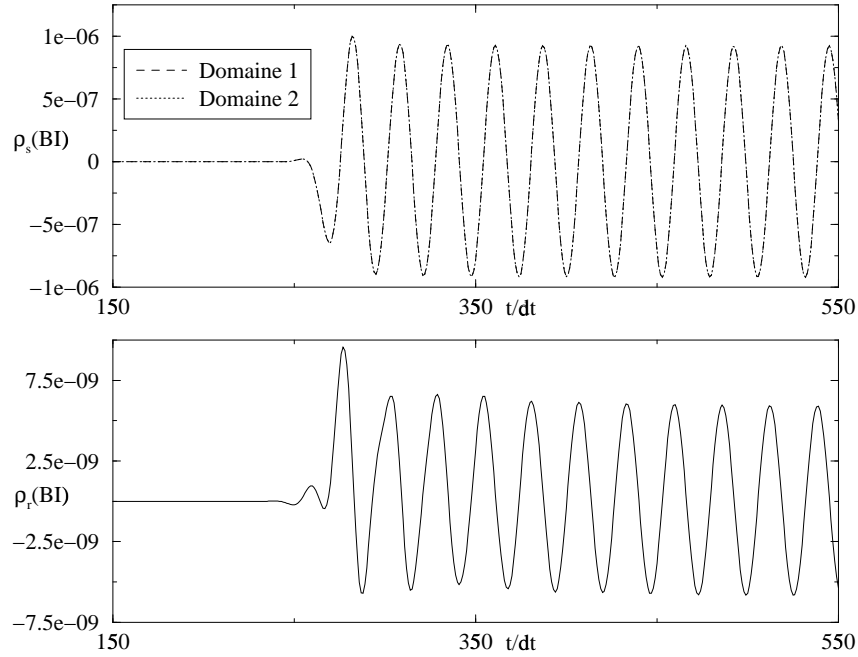


FIG. III.22 – Masse volumique (en kg.m^{-3}) de l'onde sonore $\rho_s(BI)$ dans les domaines 1 and 2 en fonction de t/dt , pour $\lambda = 0.01 \text{ m}$ (graphe du haut). L'onde réfléchie correspondante $\rho_r(BI)$ en fonction de t/dt (graphe du bas).

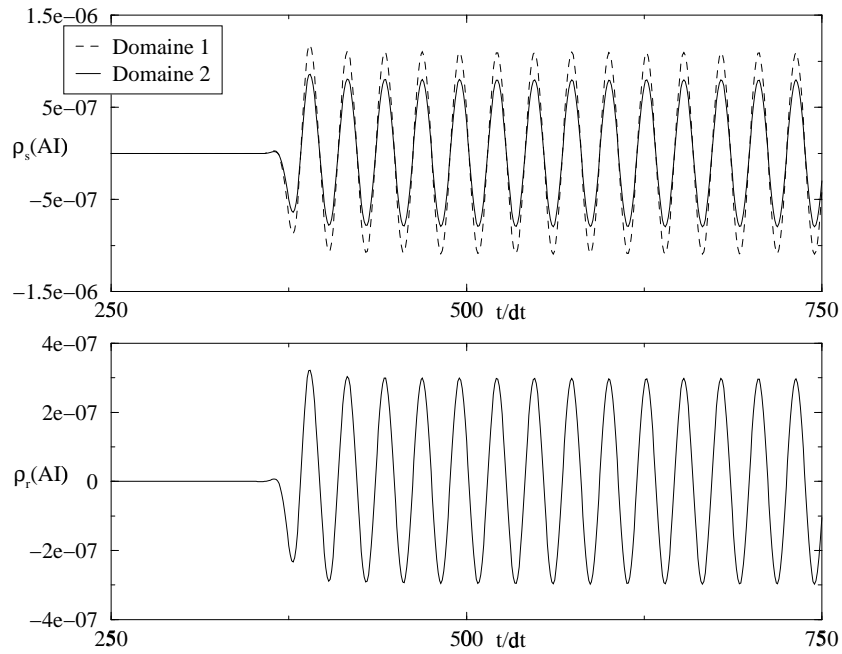


FIG. III.23 – Masse volumique (en kg.m^{-3}) de l'onde sonore $\rho_s(AI)$ dans les domaines 1 and 2 en fonction de t/dt , pour $\lambda = 0.01 \text{ m}$ (graphe du haut). L'onde réfléchie correspondante $\rho_r(AI)$ en fonction de t/dt (graphe du bas).

4.6.2 Un émetteur plan non-réfléchissant

Un émetteur d'ondes sonores planes est mis en place sur la frontière Ouest de la configuration II. La vitesse de l'onde sonore émise s'exprime de manière analogue à (3.2) :

$$u_s(\text{OI}) = u_{0s} \sin(2\pi\nu t). \quad (4.15)$$

Les trois autres frontières sont ouvertes et parfaitement non-réfléchissantes.

Les paramètres choisis sont $l = 0.1 \text{ m}$, $\Delta = 7.81 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $dt = 10^{-6} \text{ s}$ et $u_{0s} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$, ce qui correspond à une onde plane linéaire entrant dans le domaine de calcul. Un maillage uniforme de 128×128 points est utilisé dans le domaine 1. Des simulations ont été faites pour différents longueurs d'onde $\lambda = c/\nu$ et les ondes réfléchies sont analysées aux points AII and BII.

L'onde incidente étant plane et atteignant la frontière sous incidence normale, les ondes réfléchies sont identiques aux points AII and BII. Plus le nombre de points par longueur d'onde est grand, plus l'amplitude de l'onde réfléchie est faible car on résout de mieux en mieux l'oscillation plane atteignant la frontière : le coefficient de réflexion sera alors plus petit, car on atteint ici la frontière sous incidence normale, contrairement au test précédent.

La figure III.24 montre l'évolution temporelle de l'onde réfléchie pour $\lambda = 0.02 \text{ m}$ (26 points par longueur d'onde) et $\lambda = 0.01 \text{ m}$ (13 points par longueur d'onde) : après un régime transitoire correspondant au début de l'émission sonore au niveau de la frontière ouest (qui produit une onde réfléchie de longueur d'onde de l'ordre de quelques Δ), l'amplitude de l'onde réfléchie est cinq fois plus faible pour $\lambda = 0.02 \text{ m}$ que pour $\lambda = 0.01 \text{ m}$.

La figure III.25 présente l'évolution temporelle de la densité sonore au point BII dans les deux domaines 1 et 2 pour $\lambda = 0.01 \text{ m}$, ce qui correspond à la plus faible résolution spatiale (13 points par longueur d'onde) acceptable. L'évolution temporelle de l'onde réfléchie indique qu'après un régime transitoire correspondant à l'arrivée de l'onde sonore sur la frontière, son amplitude est de moins de 0.5% de l'amplitude de l'onde incidente, ce qui est cohérent avec l'estimation précédente au point BI.

4.6.3 Deux émetteurs sonores plans

Ce dernier test est effectué avec la même configuration que précédemment. Un autre émetteur plan, parallèle au premier, est ajouté au centre du domaine 1 (point OII). La vitesse de l'onde sonore émise s'exprime :

$$u_s(\text{OII}) = u_{1s} \sin(2\pi\nu t). \quad (4.16)$$

Nous avons choisi $u_{1s} = 8u_{0s}$ et cet émetteur envoie une impulsion sonore durant 2.5 périodes temporelles. Ce test est effectué pour $\lambda = 0.01 \text{ m}$ ($1/\nu = 2.63 \cdot 10^{-5} \text{ s}$) et les ondes sonores sont étudiées au point CII.

La partie supérieure de la figure III.26 présente l'évolution temporelle de la masse volumique de l'onde sonore au point CII, dans le cas où les deux émetteurs sont présents ($\rho_s(\text{CII}_b)$) et dans le cas où l'émetteur Ouest est seul ($\rho_s(\text{CII}_a)$) dans le domaine de calcul

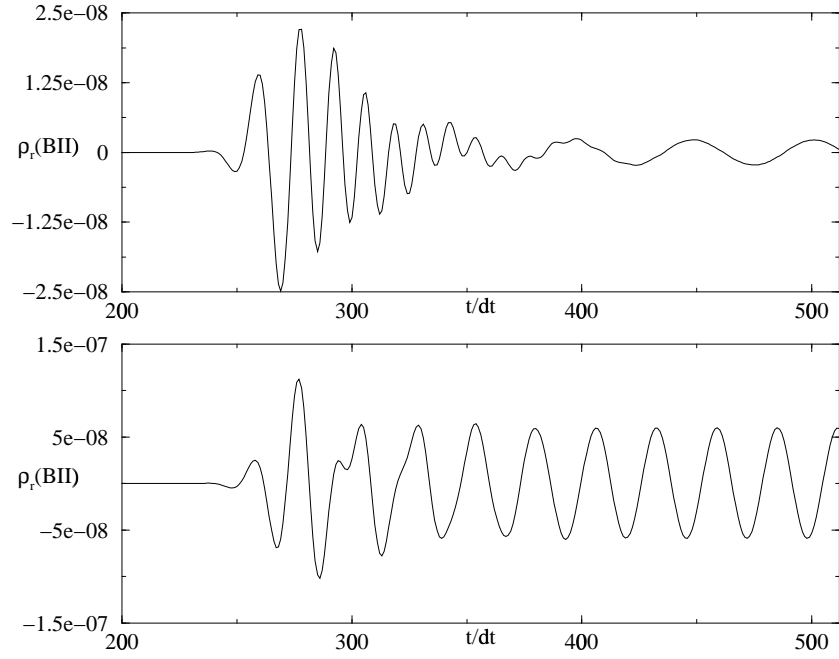


FIG. III.24 – Masse volumique (en kg.m^{-3}) de l'onde réfléchie $\rho_r(BII)$ en fonction de t/dt , pour $\lambda = 0.02 \text{ m}$ (graphe du haut) et $\lambda = 0.01 \text{ m}$ (graphe du bas).

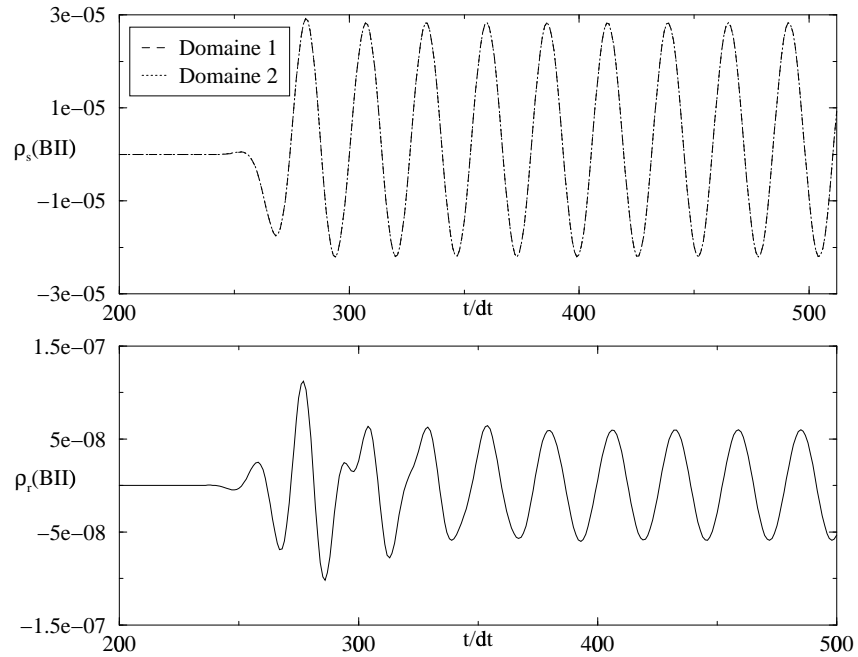


FIG. III.25 – Masse volumique (en kg.m^{-3}) de l'onde sonore $\rho_s(BII)$ dans les domaines 1 and 2 en fonction de t/dt , pour $\lambda = 0.01 \text{ m}$ (graphe du haut). L'onde réfléchie correspondante $\rho_r(BII)$ en fonction de t/dt (graphe du bas).

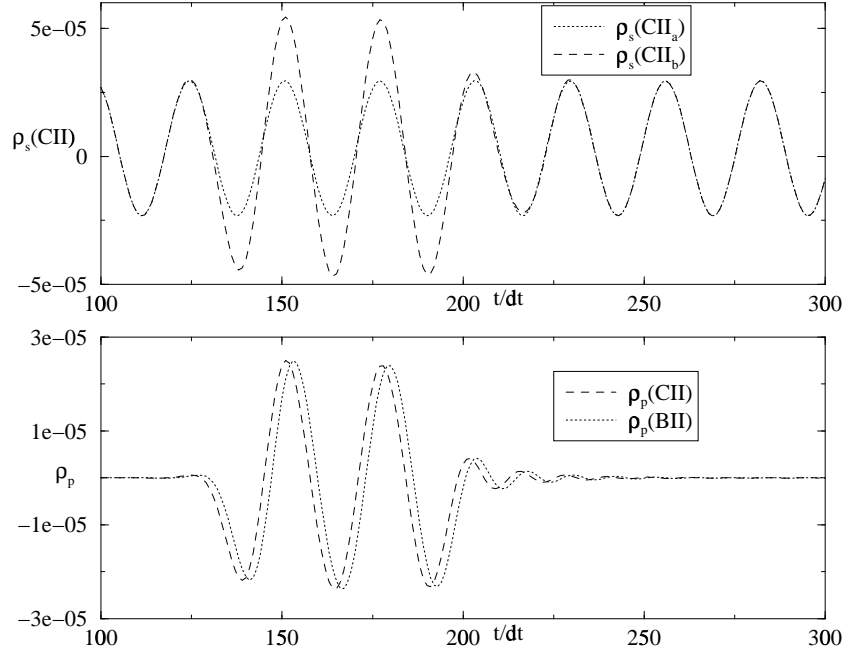


FIG. III.26 – Masse volumique (en kg.m^{-3}) de l'onde sonore $\rho_s(CII_b)$ et $\rho_s(CII_a)$ en fonction de t/dt (graphe du haut). Densité sonore du pulse $\rho_p(CII)$ et $\rho_p(BII)$ en fonction de t/dt (graphe du bas).

(d'après le test précédent). En dehors de l'instant où l'impulsion traverse la frontière Ouest, les deux signaux sont identiques.

Pour nous en assurer, nous avons calculé au point CII la masse volumique de l'impulsion sonore émise par l'émetteur central :

$$\rho_p(CII) = \rho_s(CII_b) - \rho_s(CII_a) \quad (4.17)$$

et nous l'avons comparé avec la masse volumique de l'impulsion sonore reçue au point BII (partie inférieure de la figure III.26). Le point OII n'étant pas parfaitement au centre du domaine 1, une petite différence de phase apparaît entre les deux signaux. Excepté cela, les deux signaux sont les mêmes au niveau de la frontière ouverte Est parfaitement non-réfléchissante (point BII) et au niveau de l'émetteur plan non-réfléchissant (point CII). La frontière Ouest se comporte donc comme la frontière Est pour les ondes sortant du domaine et peut être considérée comme un émetteur non-réfléchissant possédant les mêmes propriétés que la frontière Est.

4.6.4 Récapitulatif

Le tableau ci-dessous présente les valeurs du coefficient de réflexion \mathcal{R} des ondes sonores pour les deux premiers tests. Pour $\lambda = 0.05 \text{ m}$, l'estimation de \mathcal{R} au point BI est délicate car nous avons seulement accès à un petit nombre de longueurs d'onde avant que les réflexions provenant des coins ne viennent perturber l'onde réfléchie.

La précision du schéma n'est pas altérée par la mise en œuvre pratique de l'algorithme de conditions aux limites (schéma intérieur d'ordre 2 en temps (paragraphe 2.3) et conditions aux limites d'ordre 1 (paragraphe 3.3.4) [Tho90]) : les réflexions ne seront donc que faiblement affectées par la discrétisation numérique aux frontières du domaine de calcul (une mauvaise description numérique aux frontières entraînerait des réflexions parasites d'amplitude croissante lorsque la longueur d'onde diminue, pour un pas de grille constant) et le coefficient de réflexion que nous analysons est uniquement le reflet de la procédure de calcul mise en place, i.e. du choix des conditions aux limites numériques (amplitude des ondes caractéristiques) que nous imposons. De plus, nous nous sommes toujours placés dans une situation où la description des phénomènes ondulatoires est numériquement satisfaisante (paragraphe 4.4). Ainsi, les résultats présentés ne dépendent que faiblement de la longueur d'onde incidente λ .

		$\lambda = 0.01\ m$	$\lambda = 0.02\ m$	$\lambda = 0.05\ m$
Test 1	Point AI	$\mathcal{R} = 37.8\%$	$\mathcal{R} = 37.6\%$	$\mathcal{R} = 37.6\%$
	Point BI	$\mathcal{R} = 0.6\%$	$\mathcal{R} = 0.8\%$	$\mathcal{R} = 1.9\%$
	Point CI	$\mathcal{R} = 5.7\%$	$\mathcal{R} = 5.8\%$	$\mathcal{R} = 6.1\%$
Test 2	Point BII	$\mathcal{R} = 0.3\%$	$\mathcal{R} = 8.5.10^{-3}\%$	\mathcal{R} non évalué

Ces résultats montrent que notre algorithme de traitement des conditions aux limites est fiable et relativement précis pour le traitement des ondes sonores, même lorsqu'elles n'atteignent pas la frontière sous incidence normale.

Les réflexions restent cependant très importantes dans les coins du domaine de calcul : dans cette zone, l'algorithme sépare l'onde sonore en ses composantes selon les deux directions x et y et effectue un traitement séparé des conditions aux limites dans chacun des deux directions (paragraphe 2.3 et schéma III.5). Ainsi, une onde atteignant un coin sous incidence oblique est très mal résolue car on ne prend pas en compte sa direction de propagation, qui est la bissectrice des deux directions du splitting du code. Plusieurs améliorations sont possibles :

- l'ajout d'une zone tampon (« buffer ») d'une épaisseur d'une dizaine de points de grille à l'extérieur du domaine de calcul permet de diminuer sensiblement les réflexions parasites sans trop alourdir le coût du calcul et en ne modifiant rien

à l'implémentation actuelle des conditions aux limites et du schéma intérieur [Col00] ;

- un traitement bidimensionnel des conditions aux limites [Gil90, LT96, Nic98] permet de prendre en compte l'angle d'incidence des ondes sur la frontière et de réduire les réflexions parasites dans les coins ;
- un traitement bidimensionnel complet (schéma intérieur et conditions aux limites) permet un traitement global des ondes se propageant dans une direction quelconque, ce qui diminue sensiblement les réflexions parasites sur les frontières ;
- enfin, la technique de la PML (Phase Matching Layer), encore en cours de développement, pourrait être une alternative intéressante, bien que son implémentation pour des problèmes non-linéaires complexes ne soit pas pour le moment très claire.

Nous verrons au paragraphe suivant qu'un tel taux de réflexions parasites dans les coins n'est pas un trop lourd handicap pour une modélisation satisfaisante de l'interaction son-écoulement.

5. Validation dans le cadre de la diffusion du son

Dans ce paragraphe, nous présentons trois exemples numériques de diffusion du son. Afin d'étudier la diffusion en champ lointain, nous avons choisi un domaine de simulation de taille $l \times l$ avec $l \gg L$, l'approximation du champ lointain (paragraphe 3.2 du chapitre I) $l \gg 2\pi L^2/\lambda$ étant alors valable pour $\lambda \geq L$. L'amplitude de diffusion $f(\theta)$ est calculée numériquement dans le cas d'un vortex de Taylor et d'un dipôle de vortacité, et comparée à l'expression analytique établie par Fabrikant [Fab83]. Ces deux exemples seront repris plus en détail dans le chapitre IV. Nous avons également comparé le résultat de diffusion obtenue numériquement avec celui de la méthode des ondes partielles dans le cas d'un tourbillon polynomial à circulation non nulle (paragraphe 3.2 du chapitre II).

Rappelons simplement ici les principaux résultats que nous avons développés au paragraphe 3.7 du chapitre I : soit un écoulement moyen de vortacité Ω , de nombre de Mach $\mathcal{M} \ll 1$ et de taille caractéristique L , placé dans la configuration de la figure III.1. Dans le cadre de la première approximation de Born et de l'approximation du champ lointain,

- l'amplitude diffusée est proportionnelle à la transformée de Fourier de la vortacité ;
- l'amplitude de diffusion dépend de λ/L : lorsque λ/L diminue, son maximum augmente mais le secteur angulaire dans lequel la diffusion a lieu ainsi que la diffusion vers l'arrière diminuent (voir figure III.27).

5.1 Estimation des ondes réfléchies

Les tests du paragraphe 4 nous ont montré que les réflexions parasites ne pouvaient pas être négligées avec notre procédure de traitement des conditions aux limites. Comme nous l'avons déjà mentionné, un traitement bidimensionnel, comme par exemple celui proposé par Giles [Gil90] ou la mise en place d'une zone tampon, permettrait de corriger en partie ce défaut. Cependant, nous allons voir que le traitement utilisé est suffisant dans le cas des simulations numériques de diffusion que nous voulons effectuer.

Pour cette analyse d'ordre de grandeur, nous supposons que l'onde incidente a une amplitude $A_0 = 1$ et que l'écoulement moyen est un vortex de Taylor. Le phénomène

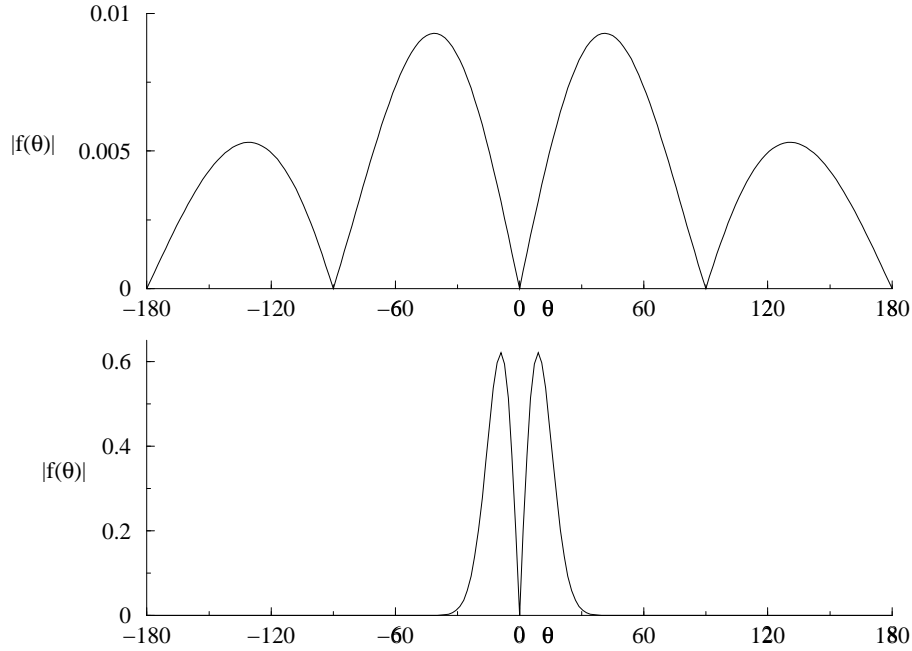


FIG. III.27 – Amplitude de diffusion théorique $|f(\theta)|$ en fonction de θ (en degrés), pour $\lambda/L = 10$ (graphe du haut) et $\lambda/L = 1$ (graphe du bas) dans le cas d'un vortex de Taylor.

de diffusion étant très sensible au rapport λ/L (voir figure III.27), nous allons effectuer l'analyse dans les deux cas $\lambda = 10L$ et $\lambda = L$.

Les réflexions peuvent toujours être négligées dans la direction incidente car on se trouve alors dans le cas où les ondes atteignent la frontière sous incidente normale, ce qui est la configuration optimale pour notre traitement. Nous supposons également que chaque point de la frontière agit comme un émetteur sonore ponctuel et réfléchit donc dans toutes les directions l'onde sonore l'atteignant. De plus, les ondes diffusées atteignant un coin du domaine ne sont pas réellement cylindriques. On peut donc penser que l'amplitude des ondes réfléchies sera plus faible que dans les tests du paragraphe 4.6.1.

- $\lambda = 10L$: dans ce cas, le maximum de l'amplitude de diffusion est 0.01 et se situe autour de $|\theta| = 45^\circ$ d'après les résultats théoriques (graphe du haut de la figure III.27). Au coin Nord-Est par exemple, l'amplitude de l'onde réfléchie ne dépassera pas $R_c \simeq 0.01 \times 0.4 = 4.10^{-3}$ d'après les résultats précédents. En raison de la symétrie cylindrique de notre problème, cette onde réfléchie va créer une nouvelle onde diffusée dont l'amplitude maximale $R_{c-scatter} \simeq 0.01 \times 4.10^{-3} \simeq 4.10^{-5}$ sera située dans une direction $|\theta'| = 45^\circ$ de sa direction de propagation, i.e. dans les directions Ouest et Sud (figure III.28). Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que les réflexions viennent perturber le phénomène de diffusion que l'on souhaite étudier. En pratique, nous n'avons pas constaté d'influence majeure sur les résultats physiques (voir paragraphe 5.2), car les

ondes réfléchies sont probablement d'amplitude plus faible que l'estimation ci-dessus ;

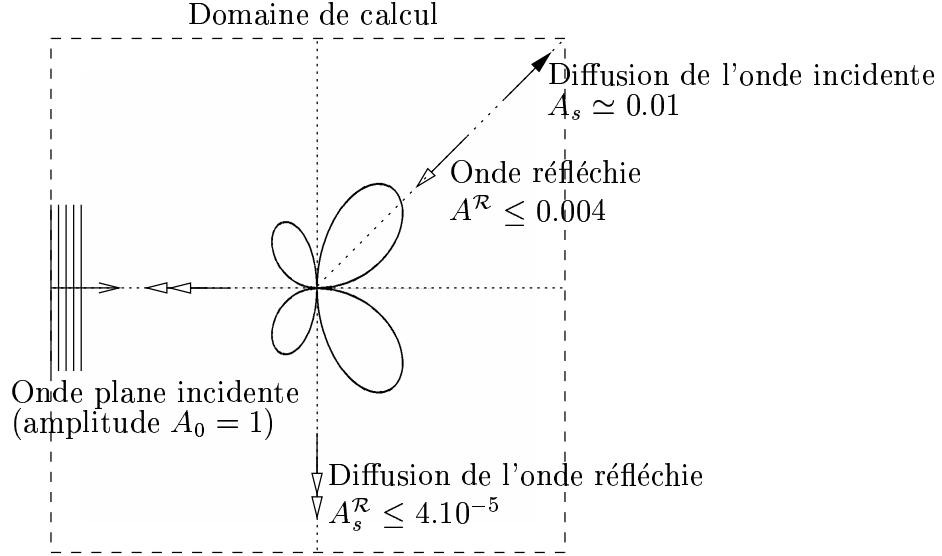


FIG. III.28 – Ordres de grandeur des ondes sonores diffusées par un vortex de Taylor et réfléchies par les conditions aux limites pour $\lambda = 10L$

- $\lambda = L$: l'amplitude de diffusion maximale est alors de 0.6 et se situe autour de $|\theta| = 10^\circ$ d'après les résultats théoriques (graphe du bas de la figure III.27).

Ainsi, les ondes réfléchies au niveau des coins du domaine de calcul peuvent être négligées. Nous pouvons également supposer que l'amplitude maximale des ondes réfléchies n'excédera pas $R_c \simeq 0.6 \times \mathcal{R}(CI) = 0.6 \times 0.06 = 0.036$ car l'angle d'incidence sur la frontière Est est proche de 20° . Les symétries de notre problème impliquent alors que cette onde réfléchie va créer une onde diffusée dont l'amplitude sera maximale dans la direction $|\theta'| = 10^\circ$ de sa direction d'incidence, avec la valeur $R_{c-scatter} \simeq 0.6 \times 0.036 \simeq 0.02$. Cette onde diffusée, ainsi que l'onde réfléchie, peuvent être négligées devant l'onde diffusée résultant de l'interaction entre l'onde incidente et l'écoulement moyen (figure III.29).

L'analyse précédente peut être effectuée pour chaque rapport λ/L . Nous avons ainsi constaté que la procédure de conditions aux limites que nous utilisons conduit à des résultats satisfaisants dans le cas de la diffusion du son.

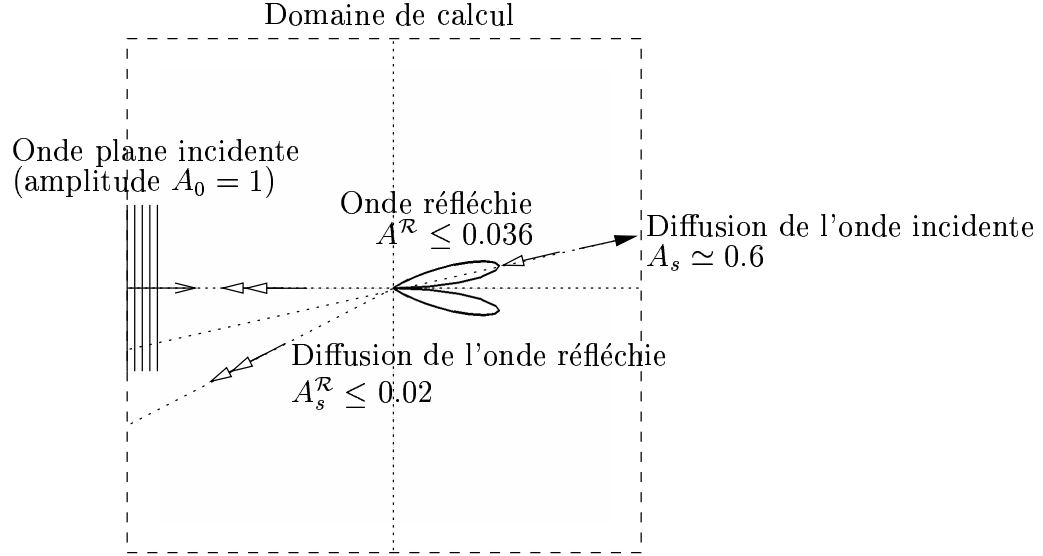


FIG. III.29 – Ordres de grandeur des ondes sonores diffusées par un vortex de Taylor et réfléchies par les conditions aux limites pour $\lambda = L$

5.2 Diffusion du son par un vortex de Taylor

On considère un tourbillon axisymétrique de taille caractéristique L_1 , dont la vorticité s'exprime par :

$$\Omega_1(r) = \Omega_0 \left(2 - (r/L_1)^2 \right) \exp \left[\frac{1 - (r/L_1)^2}{2} \right]. \quad (5.1)$$

Ω_0 est choisi afin que le nombre de Mach typique de l'écoulement soit $\mathcal{M} = 0.16$ et $L_1 = 0.01 \text{ m}$. Ce vortex est à circulation nulle

$$\Gamma = 2\pi \iint \Omega_1(r) r dr d\theta = 0. \quad (5.2)$$

L'amplitude de l'onde sonore incidente est $\rho_{0i} = 2.63.10^{-5} \text{ kg.m}^{-3}$. Afin d'être dans l'approximation de champ lointain, nous avons utilisé un maillage de pas constant de 1024×1024 points pour un domaine de calcul de $l = 0.8 \text{ m}$ (configuration A1 décrite au paragraphe 1.2). L'interaction entre une onde sonore et ce type d'écoulement est reprise plus en détail au paragraphe 1 de la partie IV.

Le graphe du haut de la figure III.30 présente l'amplitude de diffusion de la simulation numérique comparée à celle résultant d'un calcul théorique, dans le cas $\lambda/L = 10$ pour lequel la première approximation de Born est valable. L'accord entre le résultat numérique et la prédiction théorique est bon, même dans ce cas où l'amplitude de diffusion est faible. La diffusion résiduelle en $\theta = 90^\circ [180^\circ]$ peut provenir des réflexions parasites évoquées précédemment, mais aussi d'imprécisions du schéma intérieur pour de faibles amplitudes sonores.

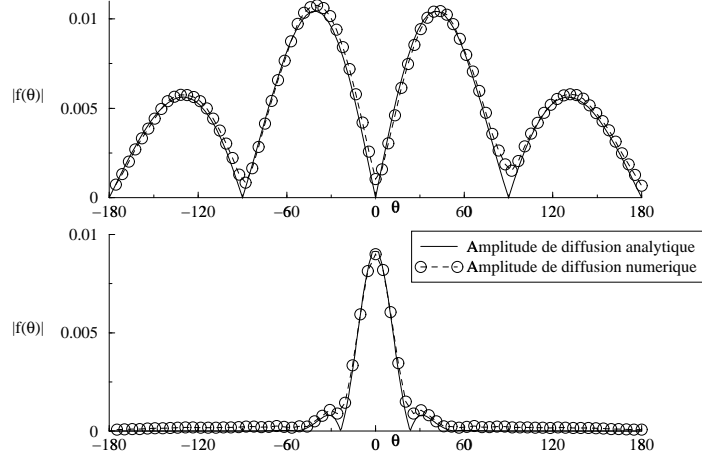


FIG. III.30 – *Comparaison entre les amplitudes de diffusion théoriques et numériques $|f(\theta)|$ en fonction de θ (en degrés). Pour le graphe du haut, l'écoulement moyen est le vortex de Taylor et $\lambda/L = 10$. L'écoulement moyen est la paire de vortex et $\lambda/L = 2$ pour le graphe du bas.*

5.3 Diffusion du son par un dipôle de vorticité

Nous considérons dans ce paragraphe une paire de tourbillons d'Oseen (de taille caractéristique L_2) contra-rotatifs et de circulation opposée (figure III.31).

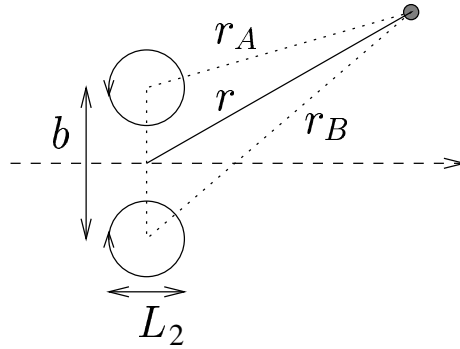


FIG. III.31 – *Paramètres pour la diffusion du son par une paire de tourbillons*

Pour un nombre de Mach petit, la vorticité totale de la paire peut être assimilée à la somme de la vorticité de chacun des tourbillons :

$$\Omega_2(r) = \Omega_0 \left[\exp \left(-(r_A/L_2)^2 \right) - \exp \left(-(r_B/L_2)^2 \right) \right]. \quad (5.3)$$

Le nombre de Mach de l'écoulement est $\mathcal{M} = 1.26.10^{-3}$, $L_2 = 0.01 \text{ m}$ et $b = 5L_2 = 0.05 \text{ m}$. L'amplitude de l'onde sonore incidente est $\rho_{0i} = 2.63.10^{-5} \text{ kg.m}^{-3}$. Nous utilisons un maillage uniforme de 512×512 points pour une taille de domaine de $l = 0.4 \text{ m}$ (configuration A2 décrite au paragraphe 1.2). Le nombre de Mach étant faible, nous pouvons

négliger le déplacement de la paire au cours de la simulation. L'interaction entre une onde sonore et ce dipôle est reprise plus en détail au paragraphe 2 de la partie IV.

La partie inférieure de la figure III.30 montre l'amplitude de diffusion pour $\lambda/L = 2$ résultant de la simulation numérique et du calcul analytique, la première approximation de Born étant valable pour les paramètres précédents. L'accord entre les deux résultats est correct, les faibles écarts pouvant être attribués à une précision angulaire insuffisante, au traitement des conditions aux limites et aux imprécisions du schéma intérieur.

5.4 Diffusion par un tourbillon à circulation non nulle

Nous allons dans ce paragraphe étudier l'interaction entre une onde sonore et un vortex polynomial à circulation non nulle. La vorticité de ce tourbillon, dont nous avons déjà évoqué la structure au paragraphe 3.2 du chapitre II, s'écrit :

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0 \left(1 - \frac{3r^2}{L_m^2} + \frac{2r^3}{L_m^3} \right) & r \leq L_m \\ \Omega &= 0 & r \geq L_m.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Nous présentons un exemple d'interaction entre ce tourbillon et une onde sonore, pour un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 3.9 \cdot 10^{-2}$ et avec $L_m \simeq 0.015 m$, ce qui implique que la vitesse de l'écoulement est maximale pour $r = 0.01 m$. La longueur d'onde sonore est $\lambda = 0.01 m = 2L_m/3$. Cet exemple permet également de valider notre procédure CL₂ de traitement des conditions aux limites dans un cas où les hypothèses de l'implémentation I₃ (paragraphe 3.5.5) ne sont pas vérifiées de manière triviale (l'écoulement n'est pas proche du repos au niveau des frontières).

La simulation numérique est effectuée avec une onde incidente d'amplitude $\rho_{0i} = 2.63 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^{-3}$ et un maillage uniforme de 512×512 points pour une taille de domaine de $l = 0.4 m$ (configuration A2 décrite au paragraphe 1.2).

Le calcul analytique a été effectué sur un domaine de taille $0.4 m \times 0.4 m$, ce qui correspond à un domaine carré de taille $26L_m$ environ. $\beta \simeq 9.8$ ($n_{max} = 500$ et $p_{max} = 1000$) et l'amplitude de l'onde sonore incidente est fixée à $\rho_{0i} = 1 kg \cdot m^{-3}$ pour la méthode des ondes partielles (voir le paragraphe 3.2 du chapitre II).

Les figures III.32 et III.33 présentent le champ sonore ρ_{son} résultant de l'interaction d'une onde plane incidente avec le tourbillon. On constate un bon accord entre les deux méthodes bien que l'on soit dans la limite de résolution sonore de la simulation numérique et que la condition $\beta \gg 1$ ne soit pas tout à fait vérifiée pour la méthode des ondes partielles.

Afin d'affiner la comparaison, nous avons tracé l'amplitude de diffusion $|f(\theta)|$, telle que nous l'avons définie par la relation (3.3) du chapitre I. La figure III.34 présente cette comparaison : on constate un bon accord entre les deux méthodes dans un secteur angulaire autour de la direction incidente $\theta = 0$ ainsi que dans l'allure globale de la décroissance de l'amplitude de diffusion. Par contre, il apparaît des différences quantitatives entre les

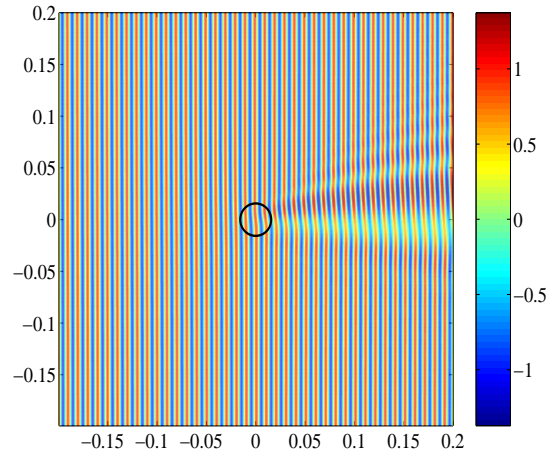


FIG. III.32 – *Onde sonore totale issue de l'interaction son-écoulement pour un tourbillon à circulation non nulle (5.4) avec une onde plane incidente d'amplitude 1 kg.m^{-3} : $\mathcal{M} \simeq 0.039$ et $\lambda/L_m = 2/3$ avec la méthode des ondes partielles (sa position est repéré par le cercle de rayon L_m). Les unités sur chaque axe sont en mètres.*

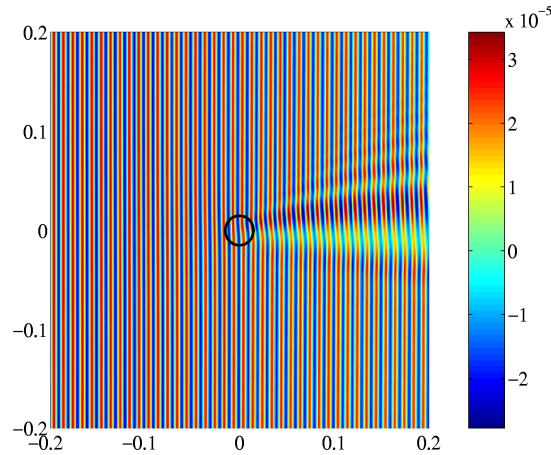


FIG. III.33 – *Onde sonore issue de l'interaction son-écoulement pour un tourbillon à circulation non nulle (5.4) avec une onde plane incidente d'amplitude $2.63 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^{-3}$: $\mathcal{M} \simeq 0.039$ et $\lambda/L_m = 2/3$ avec la simulation numérique (sa position est repéré par le cercle de rayon L_m). Les unités sur chaque axe sont en mètres.*

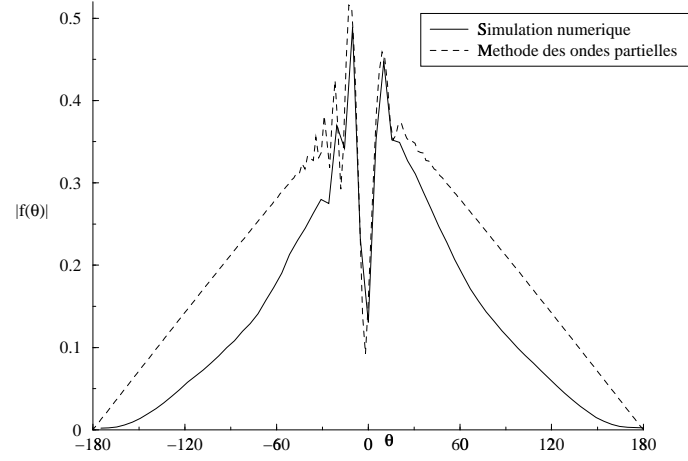


FIG. III.34 – *Comparaison entre les amplitudes de diffusion numérique et issue de la méthode des ondes partielles $|f(\theta)|$ en fonction de θ (en degrés) dans le cas d'un tourbillon à circulation non nulle (3.19) : $\mathcal{M} \simeq 0.039$ et $\lambda/L_m = 2/3$.*

deux méthodes, essentiellement car on se situe sans doute à la limite de résolution des deux méthodes.

6. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les différents aspects de la simulation numérique mise en œuvre dans le cadre de l'étude de l'interaction son-écoulement. Après avoir décrit le schéma intérieur de Mac-Cormack utilisé, nous nous sommes attachés à détailler la procédure de traitement des conditions aux limites. Afin d'obtenir un algorithme de conditions aux limites permettant une modélisation satisfaisante de l'interaction, nous avons développé une nouvelle procédure de calcul des conditions aux limites basée sur une décomposition des variables physiques au voisinage des frontières du domaine de calcul.

Plusieurs séries de tests ont été effectués et montrent le bon comportement de la simulation numérique vis-à-vis de l'écoulement moyen et des ondes sonores se propageant dans le domaine de calcul. Enfin, les résultats numériques de diffusion du son sont en très bon accord avec les prédictions analytiques dans la limite de la première approximation de Born.

Nous allons maintenant pouvoir utiliser la simulation numérique décrite dans ce chapitre afin d'étudier plus précisément l'interaction son-écoulement dans des régimes où la description analytique n'est plus valable (approximation de champ lointain ou approximation de Born non vérifiées), aussi bien pour des écoulements à circulation nulle (chapitre IV) que pour des écoulements à circulation non nulle (chapitre V)

Annexes

III.A Méthode des caractéristiques pour les frontières

La méthode des caractéristique a été largement utilisée en analyse numérique [Str89, Hir92] et dans l'analyse de problèmes de propagation d'ondes [Whi99]. Elle a été développée de manière générique pour le traitement des conditions aux limites des problèmes hyperboliques, souvent rencontrés en dynamique des fluides, par Thompson [Tho87, Tho90].

Variables caractéristiques

Le système d'équations (2.1) peut aussi s'écrire sous la forme non-conservative

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.1})$$

avec

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Thompson appelle variables primitives $\tilde{U}(x, y, t)$, par opposition à $U(x, y, t)$, qui sont des variables conservatives. Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = u = \lambda_2, \quad \lambda_3 = u + c, \quad \lambda_4 = u - c \quad (\text{III.3})$$

et sont associées aux vecteurs propres à gauche

$$\begin{cases} l_1 &= (-c^2 & 0 & 0 & 1) \\ l_2 &= (0 & 0 & 1 & 0) \\ l_3 &= (0 & \rho c & 0 & 1) \\ l_4 &= (0 & -\rho c & 0 & 1) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

où $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ est la vitesse locale du son. Les valeurs propres et les vecteurs propres de B ont des expressions analogues en remplaçant u par v .

Soit une frontière du domaine de calcul définie par $x = x_0$ (l'extérieur du domaine est défini par $x \geq x_0$). Nous ne considérerons que les gradients perpendiculaires à cette frontière, i.e. selon la direction x . Dans cette approche monodimensionnelle, le système (III.1) se réduit à

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t'} + A \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.5})$$

la notation t' signalant que l'on ne s'intéresse qu'à la variation temporelle liée à une variation spatiale selon x , i.e. que l'on se restreint à une approche monodimensionnelle. En introduisant la matrice diagonale Λ et la matrice de passage P résultant de la diagonalisation de $A = P^{-1}\Lambda P$, (III.5) s'écrit, au niveau de la frontière,

$$l_i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t'} + \lambda_i l_i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0 \quad i = 1, \dots, 4. \quad (\text{III.6})$$

La relation (III.6) modélise la propagation à une dimension d'une onde à la vitesse de phase λ_i . Ainsi, la quantité $l_i \tilde{U}$ est appelée « amplitude caractéristique » et correspond, si les vecteurs l_i sont constants (i.e. si la matrice A est constante), à l'amplitude de l'onde traversant la frontière $x = x_0$ avec la « vitesse caractéristique » λ_i .

Dans le cas général où A n'est pas constante, la relation (III.6) est toujours valable. On définit alors

$$\mathcal{L}_i \equiv \lambda_i l_i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}, \quad (\text{III.7})$$

ce qui permet d'écrire la relation (III.6) au niveau de la frontière sous la forme plus compacte :

$$l_i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t'} + \mathcal{L}_i = 0 \quad i = 1, \dots, 4 \quad (\text{III.8})$$

Les variables \mathcal{L}_i sont une forme plus générale des grandeurs caractéristiques et correspondent, à la vitesse de propagation λ_i près, à la variation spatiale de l'amplitude des ondes pouvant physiquement traverser la paroi :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_1 = u \left[\frac{\partial p}{\partial x} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] & \text{mode entropique,} \\ \mathcal{L}_2 = u \frac{\partial v}{\partial x} & \text{mode d'advection,} \\ \mathcal{L}_3 = (u + c) \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right] & \text{mode sonore,} \\ \mathcal{L}_4 = (u - c) \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right] & \text{mode sonore.} \end{array} \right. \quad (\text{III.9})$$

Variation des grandeurs physiques au niveau de la frontière

En restant dans le cadre d'une frontière située en $x = x_0$, on peut alors relier les variations spatiales et temporelles des grandeurs physiques aux \mathcal{L}_i . Par exemple, les gradients

de vitesse au niveau de la frontière s'expriment :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\rho c} \left(\frac{\mathcal{L}_3}{u+c} - \frac{\mathcal{L}_4}{u-c} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\mathcal{L}_2}{u}. \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

tandis que les variations temporelles de la vitesse s'expriment, d'après (III.8) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t'} &= -\frac{1}{2\rho c} (\mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_4) \\ \frac{\partial v}{\partial t'} &= -\mathcal{L}_2. \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

D'autres relations peuvent être obtenues à l'aide des relations (III.9) [Tho90, PL92]. Par exemple, la variation temporelle de la quantité de mouvement selon x s'exprime :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t'} = -\frac{1}{c} [-\mathcal{M}\mathcal{L}_1 + 0.5((\mathcal{M}-1)\mathcal{L}_4 + (\mathcal{M}+1)\mathcal{L}_3)] \quad (\text{III.12})$$

où $\mathcal{M} = u/c$ est le nombre de Mach local de l'écoulement.

Discussion

La méthode proposée ci-dessus est une linéarisation des équations au niveau de la frontière, en « gelant » les non-linéarités, comme le souligne Givoli [Giv91] et Yee [Yee81]. Cette linéarisation est implicite dès la diagonalisation des matrices A et B et l'écriture des relations (III.7) : on suppose que les valeurs des éléments des matrices sont des constantes, i.e. ce sont les valeurs à l'instant t et au point (x_0, y_0) de la frontière. Cette hypothèse, peu restrictive pour l'analyse numérique de phénomènes ondulatoires, « gèle » la valeur des valeurs propres λ_i et des vecteurs propres l_i lors de l'expression numérique de la variation des grandeurs physiques (relation (III.10) par exemple).

Il ne s'agit cependant pas d'une linéarisation des équations au niveau de la frontière (voir par exemple [BT82]), comme le montre les relations (III.10), mais bien d'un « gel » des variables primitives lorsque les différents modes traversent la frontière (on applique une théorie perturbative au premier ordre uniquement au niveau de la frontière en négligeant, par exemple, l'effet de la variation de la vitesse de phase des modes). Ainsi, en notant $\underline{\rho}$, \underline{u} et \underline{c} les valeurs de la masse volumique, de la composante de la vitesse perpendiculaire à la paroi et de la vitesse locale du son « gelées » pour le calcul de conditions aux limites, les variables \mathcal{L}_i prennent la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 &= \underline{u} \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \underline{c}^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] \\ \mathcal{L}_2 &= \underline{u} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \mathcal{L}_3 &= (\underline{u} + \underline{c}) \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \underline{\rho} \underline{c} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ \mathcal{L}_4 &= (\underline{u} - \underline{c}) \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \underline{\rho} \underline{c} \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

III.B Procédure de calcul des conditions aux limites

Position du problème

Nous avons vu au paragraphe 2.3 qu'à deux dimensions, on se ramène, via une série de passes selon les deux directions x et y , à un traitement monodimensionnel du système (2.1). Du point de vue du traitement des conditions aux limites, on se retrouve donc dans la même situation que dans l'annexe précédent III.A (équation (III.5) pour une passe selon x), bien que l'on considère un problème bidimensionnel.

Pour la résolution numérique, afin de corriger l'extrapolation effectuée aux points frontières (paragraphe 2.2.2) pour prendre en compte les conditions aux limites physiques, il est nécessaire d'accéder à la variation temporelle des variables conservatives au niveau de la frontière considérée [HT95, GE95, Hir92].

Variation temporelle des modes caractéristiques

En posant

$$\delta W_i \equiv l_i \delta \tilde{U}. \quad (\text{III.14})$$

la relation (III.6) devient

$$\frac{\delta W_i}{\delta t'} + \lambda_i \frac{\delta W_i}{\delta x} = 0 \quad i = 1, \dots, 4. \quad (\text{III.15})$$

Il s'agit d'une formulation analogue à la formulation en terme d'amplitude caractéristique que nous avons évoquée dans l'annexe III.A, bien que l'on raisonne ici sur les variations élémentaires des champs $\delta \tilde{U}$, et non pas sur les champs \tilde{U} : W_i apparaît comme l'amplitude de l'onde caractéristique traversant la frontière du domaine $x = x_0$ en se propageant à la vitesse λ_i ; le long de la caractéristique $x + \lambda_i t = C^{\text{te}}$, l'amplitude W_i est conservée.

Il faut de plus remarquer que la relation (III.15) revient à négliger la variation des vecteurs propres l_i , ce qui est cohérent avec la discussion que nous avons faite à la fin de l'annexe III.A sur le gel des valeurs propres et des vecteurs propres.

En comparant (III.15) et (III.8), on en déduit que

$$\lambda_i \frac{\delta W_i}{\delta x} = \mathcal{L}_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (\text{III.16})$$

ce qui permet d'exprimer la relation (III.15) sous la forme

$$\frac{\delta W_i}{\delta t'} + \mathcal{L}_i = 0 \quad i = 1, \dots, 4. \quad (\text{III.17})$$

Ainsi, les variations spatiales des variables \mathcal{L}_i sont reliées aux variations temporelles des variables W_i au niveau des frontières : imposer des conditions aux limites sur les variations temporelles des variables W_i est équivalent à imposer des conditions aux limites sur les \mathcal{L}_i (voir le paragraphe 3.3 et [Tho90, PL92]) puisque

$$\frac{\delta W_i}{\delta t'} = -\mathcal{L}_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad [\text{Nic99}]. \quad (\text{III.18})$$

Il est important de noter que l'équivalence (III.18) n'est valable que pour des problèmes monodimensionnels [Nic98], ce qui est bien le cas avec le schéma numérique que nous utilisons ici.

À l'aide de la définition (III.14), on accède à l'expression des δW_i :

$$\begin{cases} \delta W_1 &= \delta p - \underline{c}^2 \delta \rho \\ \delta W_2 &= \delta v \\ \delta W_3 &= \delta p + \underline{\rho} \underline{c} \delta u \\ \delta W_4 &= \delta p - \underline{\rho} \underline{c} \delta u. \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

On peut alors déterminer la variation temporelle des W_i : en posant

$$w_i \equiv \frac{\delta W_i}{\delta t} = -\mathcal{L}_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (\text{III.20})$$

on a

$$\begin{cases} w_1 &= \frac{\delta p}{\delta t} - \underline{c}^2 \frac{\delta \rho}{\delta t} \\ w_2 &= \frac{\delta v}{\delta t} \\ w_3 &= \frac{\delta p}{\delta t} + \underline{\rho} \underline{c} \frac{\delta u}{\delta t} \\ w_4 &= \frac{\delta p}{\delta t} - \underline{\rho} \underline{c} \frac{\delta u}{\delta t} \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Par exemple, les relations (III.11) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta t} &= \frac{1}{2\underline{\rho} \underline{c}} (w_3 - w_4) \\ \frac{\delta v}{\delta t} &= w_2. \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Chapitre IV

Écoulements à circulation nulle

M. le professeur Portin a déclaré à ses éminents collègues qu'après six mois de recherches, et après avoir pris connaissance des travaux semblables menés en tous les points du globe sur le même sujet, il en était arrivé à la conclusion suivante : ...

R. Barjavel.

1. Vortex isolé à circulation nulle

1.1 Introduction

Nous allons étudier dans ce paragraphe la diffusion du son par un tourbillon stationnaire unique à circulation nulle. Pour cela, nous avons choisi deux modèles de tourbillons à circulation nulle : le vortex de Taylor et un tourbillon polynomial. Ces deux tourbillons sont constitués d'un cœur et d'une couronne en rotation, afin d'annuler la circulation totale de l'écoulement.

Ces deux écoulements à circulation nulle nous permettent d'étudier l'influence de différents paramètres sur la diffusion du son et de comparer les résultats avec les estimations théoriques dont nous avons parlé dans le paragraphe 3 du chapitre I.

La circulation des écoulements considérés étant nulle, l'amplitude de diffusion, calculée dans le cadre des approximations de Born et du champ lointain (paragraphe 3.7.2 et 3.2 du chapitre I), ne présente pas de divergence dans la direction d'incidence. Ainsi, après avoir dans une première partie, préciser de manière quantitative le critère théorique de la diffraction de Fraunhofer (annexe 3.A du chapitre I) qui justifie l'approximation de champ lointain, nous étudierons dans une seconde partie la validité de la première approximation de Born ainsi que les écarts à cette approximation.

Dans les deux parties suivantes, nous étudierons l'influence du sens de rotation de l'écoulement sur la réfraction des ondes sonores et l'influence du nombre de Mach \mathcal{M} sur la diffusion du son, pour une longueur d'onde sonore incidente fixée.

Les méthodes que nous avons développées précédemment (la méthode des ondes partielles explicitée au paragraphe 2 du chapitre II et la simulation numérique détaillée au chapitre III) nous fournissent deux outils pour une étude approfondie de l'influence de la longueur d'onde sonore sur la diffusion de son, pour un écoulement donné (vorticité $\Omega(r)$, taille(s) caractéristique(s) et \mathcal{M} donnés). Nous serons ainsi en mesure d'étudier le comportement de l'amplitude de diffusion et l'évolution de la section efficace totale avec la longueur d'onde sonore, ainsi que les effets de champs proche sur l'amplitude de diffusion.

1.2 Structure des tourbillons à circulation nulle

1.2.1 Le tourbillon de Taylor

La vorticité de ce tourbillon [Tay60] s'exprime

$$\vec{\Omega}(r) = \Omega_0 \left(2 - (r/L_1)^2\right) \exp\left[\frac{1 - (r/L_1)^2}{2}\right] \hat{z} \quad (1.1)$$

et son champ de vitesse a pour expression

$$\vec{v}(r) = \Omega_0 r \exp\left[\frac{1 - (r/L_1)^2}{2}\right] \hat{\theta} \quad (1.2)$$

en utilisant la relation

$$\Omega(r) \hat{z} = \overrightarrow{\text{rot}} [v(r) \hat{\theta}] \implies \Omega(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v)}{\partial r} \quad (1.3)$$

en coordonnées cylindriques. $\Omega_0 > 0$ signifie que l'écoulement tourne dans le sens trigonométrique.

L'équation de continuité

$$\rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (1.4)$$

qui s'écrit en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\rho \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \left[v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] = 0 \quad (1.5)$$

est automatiquement vérifiée puisque $\vec{v} = v(r) \hat{\theta}$ et $\rho = \rho(r)$.

Ce tourbillon axisymétrique et stationnaire est solution de l'équation d'Euler

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \quad (1.6)$$

qui prend la forme

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r} \quad (1.7)$$

en coordonnées cylindriques.

En assimilant le fluide à un gaz parfait et utilisant l'équation d'état

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C^{\text{te}} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad (1.8)$$

où, pour l'air, à température ambiante, $\rho_0 = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, $p_0 = 1.03.10^5 \text{ Pa}$ et $\gamma = 1.4$, le champ de pression correspondant à ce tourbillon compressible est :

$$p(r) = p_0 \left[1 - \frac{(\Omega_0 L_1)^2 \rho_0}{2 p_0} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \exp\left[1 - (r/L_1)^2\right] \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (1.9)$$

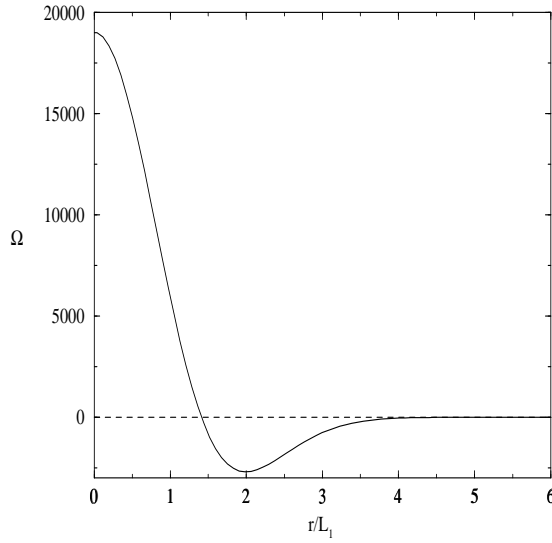


FIG. IV.1 – Vorticité Ω (en s^{-1}) en fonction de r/L_1 pour le vortex de Taylor (1.1) avec $\mathcal{M} \simeq 0.16$.

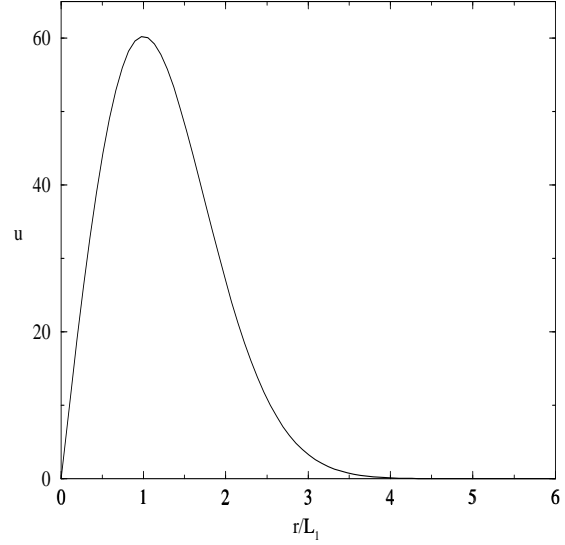


FIG. IV.2 – Vitesse v_θ (en $m.s^{-1}$) en fonction de r/L_1 pour le vortex de Taylor (1.2) avec $\mathcal{M} \simeq 0.16$.

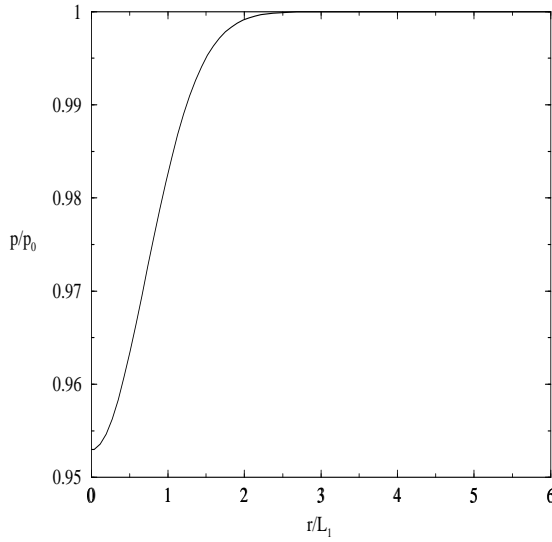


FIG. IV.3 – Pression p/p_0 en fonction de r/L_1 pour le vortex de Taylor (1.9) avec $\mathcal{M} \simeq 0.16$.

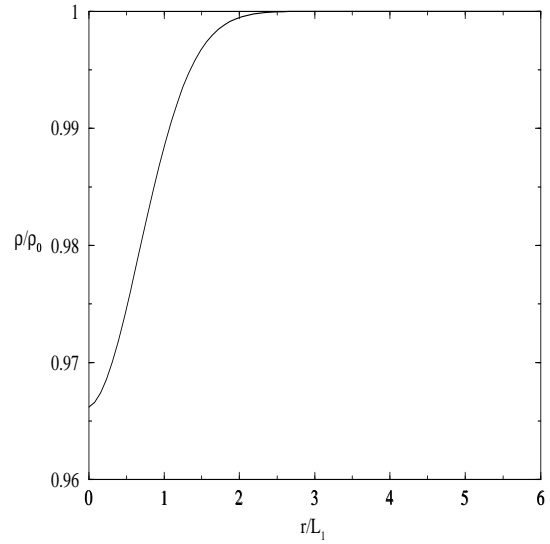


FIG. IV.4 – Masse volumique ρ/ρ_0 en fonction de r/L_1 pour le vortex de Taylor avec $\mathcal{M} \simeq 0.16$.

Les figures IV.1-IV.4 présentent l'allure de la vorticité, de la vitesse et de la masse volumique de ce tourbillon pour un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$. En choisissant $\Omega_0 > 0$, le tourbillon de Taylor peut être modélisé par un cœur de vorticité positive et de rayon $\sqrt{2} L_1$ et une couronne extérieure de vorticité négative pour $\sqrt{2} L_1 \leq r \leq 4 L_1$ (voir la figure IV.1).

La vitesse de cet écoulement est maximale pour $r = L_1$, ce qui permet d'exprimer simplement le nombre de Mach de ce tourbillon :

$$\mathcal{M} = \frac{|\Omega_0| L_1}{c} \quad (1.10)$$

La diffusion du son par cet écoulement a déjà été étudiée par Colonius et al. [CLM94] afin de mieux comprendre la modélisation pertinente des termes sources de l'équation de Lightill [Lig52].

1.2.2 Le tourbillon polynomial

Nous avons déjà utilisé cet écoulement pour illustrer la méthode des ondes partielles au paragraphe 3.3 du chapitre II. Sa vorticité, composée d'un cœur de rayon L_1 entouré d'une couronne de rayons L_1 et L_m , est de la forme

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 \left(1 - \frac{r^2}{L_1^2}\right) \left(1 - \frac{3r^2}{L_m^2} + \frac{2r^3}{L_m^3}\right) & r \leq L_m \\ \Omega &= 0 & r \geq L_m. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Imposer une circulation nulle à cet écoulement fournit une relation entre L_1 et L_m :

$$\iint \Omega r dr d\theta = \Gamma = 0 \quad \implies \quad L_m = \sqrt{4.2} L_1. \quad (1.12)$$

En utilisant la relation (1.3), on en déduit le champ de vitesse

$$U(r) = \frac{\Omega_0 r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{2} \left[\frac{3}{L_m^2} + \frac{1}{L_1^2}\right] + \frac{4r^3}{5L_m^3} + \frac{r^4}{L_1^2 L_m^2} - \frac{4r^5}{7L_1^2 L_m^3}\right) \quad r \leq L_m \quad (1.13.a)$$

$$U(r) = 0 \quad r \geq L_m. \quad (1.13.b)$$

De manière analogue à ce que nous avons fait pour le vortex de Taylor au paragraphe précédent, on peut déduire de l'équation d'Euler le champ de pression de cet écoulement :

$$p(r) = p_0 \left[1 - \frac{\rho_0}{p_0} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \int_r^{L_2} \frac{U(R)^2}{R} dR\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad r \leq L_m \quad (1.14.a)$$

$$p(r) = p_0 \quad r \geq L_m, \quad (1.14.b)$$

où $U(R)$ est donnée par la relation (1.13.a), la masse volumique du tourbillon étant reliée à la pression par l'équation d'état (1.8).

L'allure de la vorticité, de la vitesse, de la pression et de la masse volumique de cet écoulement est présentée sur les figures IV.5-IV.8 pour un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.15$.

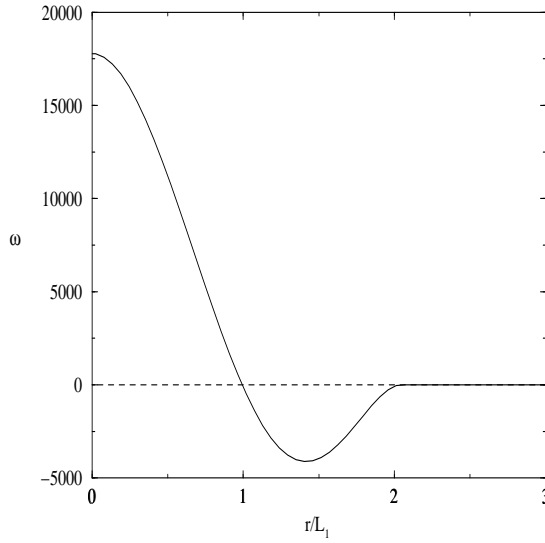


FIG. IV.5 – Vorticité Ω (en s^{-1}) en fonction de r/L_1 pour le vortex polynomial (1.11) avec $\mathcal{M} \simeq 0.15$.

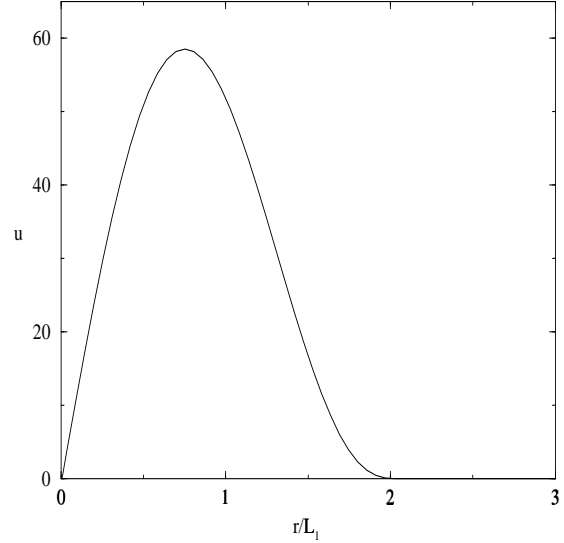


FIG. IV.6 – Vitesse v_θ (en $m.s^{-1}$) en fonction de r/L_1 pour le vortex polynomial (1.13) avec $\mathcal{M} \simeq 0.15$.

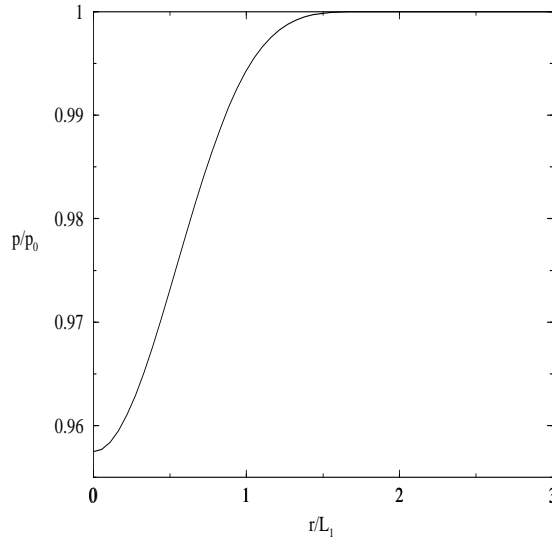


FIG. IV.7 – Pression p/p_0 en fonction de r/L_1 pour le vortex polynomial à circulation nulle (1.14) avec $\mathcal{M} \simeq 0.15$.

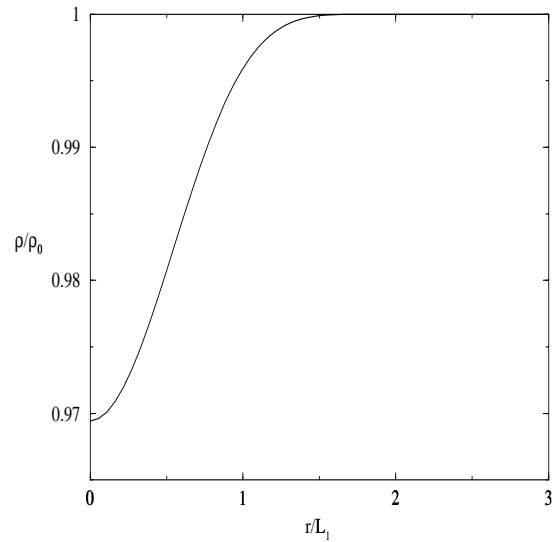


FIG. IV.8 – Masse volumique ρ/ρ_0 en fonction de r/L_1 pour le vortex polynomial à circulation nulle avec $\mathcal{M} \simeq 0.15$.

1.2.3 Comportement dans la limite de la diffusion à grande longueur d'onde

En effectuant une analogie avec l'électrostatique, assimilons la distribution de vorticité à une distribution de charges. Ainsi, ces tourbillons sont équivalents à une distribution de charges positives entourée d'une couronne de charges négatives. Dans cette analogie, la circulation est équivalente à la charge totale de la distribution (voir la relation 1.12). Il s'agit donc d'une distribution de charges dont la charge totale est nulle, et dont le moment dipolaire est également nul. Le premier moment non nul est le moment quadrupolaire.

Dans la limite des grandes longueurs d'onde ($\lambda \gg L$) où l'onde sonore ne distingue que la structure globale des écoulements, ces distributions de vorticité agiront donc vis-à-vis de la diffusion du son comme des quadrupoles, dans l'hypothèse où la contribution majeure à la diffusion du son provient des termes rotationnels.

1.3 Limite du champ lointain

Avant de pouvoir étudier la validité de la première approximation de Born, il est nécessaire de préciser la notion de champ lointain, afin de pouvoir travailler avec l'amplitude de diffusion $f(\theta)$, aussi bien dans le cas de la simulation numérique que dans celui des ondes partielles. Nous l'avons définie au paragraphe 3.3 du chapitre I à partir de l'amplitude de l'onde sonore ρ_s :

$$\rho_s(r, \theta) = \rho_{inc}(r, \theta) + \rho_{diff}(r, \theta) = \rho_{inc}(r, \theta) \left[1 + \frac{f(\theta)}{\sqrt{r}} \right] \quad (1.15)$$

dans le cadre de l'approximation du champ lointain. Comme nous l'avons déjà vu dans l'annexe 3.A du chapitre I, l'approximation du champ lointain est analogue au critère de Fraunhofer pour la diffraction en optique : on se trouve dans l'approximation du champ lointain si la distance d'observation R vérifie

$$R \gg \frac{2\pi (2L)^2}{\lambda} = R_{Fr} \quad (1.16)$$

où L est la taille caractéristique de l'élément diffractant et λ la longueur d'onde incidente. La définition (1.15) suppose que l'on se trouve dans l'approximation du champ lointain (1.16) afin de pouvoir décomposer l'onde sonore en une onde plane incidente et une onde diffusée dont l'amplitude ne dépend que de l'angle polaire d'observation θ et décroit en $1/\sqrt{r}$ (décroissance caractéristique d'une onde cylindrique divergente). Cependant, le critère de Fraunhofer (1.16) reste assez vague et nous avons souhaité quantifier de manière plus précise cette limite. L'intérêt d'une telle caractérisation est double :

- comme nous l'avons déjà dit, cela nous permettra d'étudier les écarts à l'approximation de Born en étant certain de nous trouver dans une région d'observation où la décomposition (1.15) est valable ;

- expérimentalement, les observations sont rarement effectuées dans la condition (1.16) car contrairement à l'optique, on ne peut utiliser de lentille pour observer le champ diffusé dans son plan focal.

Afin de quantifier la distance critique R_c permettant de se placer en pratique dans des conditions proches de celle du champ lointain, nous avons étudié la diffusion par le vortex de Taylor décrit au paragraphe 1.2.1 avec $\Omega_0 = 10000 \exp(-1/2) s^{-1}$ et $L_1 = 0.01 m$, ce qui correspond à un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$. Nous avons effectué cette analyse en généralisant la décomposition (1.15) sous la forme

$$\rho_s(r, \theta) = \rho_{inc}(r, \theta) + \rho_{diff}(r, \theta) = \rho_{inc}(r, \theta) \left[1 + \frac{g(r, \theta)}{\sqrt{r}} \right] \quad (1.17)$$

où l'amplitude $g(r, \theta)$ dépend à la fois de la distance et de l'angle d'observation. En comparant (1.17) et (1.15), il vient

$$\forall \theta, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g(r, \theta) = f(\theta). \quad (1.18)$$

Nous pouvons ainsi déterminer R_c en étudiant l'évolution de g en fonction de la distance d'observation : pour $R \geq R_c$, l'amplitude g doit être indépendant de la distance d'observation R et se confond alors avec l'amplitude de diffusion usuelle f .

Le critère de diffraction en champ lointain R_{Fr} doit prendre en compte la taille caractéristique de l'objet diffractant. Or, dans le cas du tourbillon de Taylor, la taille caractéristique de diffraction n'est pas L_1 mais $L_{Ta} = \sqrt{2} L_1$ si l'on analyse la structure du champ de vitesse présentée sur la figure IV.2. Ainsi,

$$R_{Fr} = \frac{2\pi(2\sqrt{2}L_1)^2}{\lambda} \simeq \frac{5.03 \cdot 10^{-3}}{\lambda} m \quad (1.19)$$

avec λ exprimé en mètres.

L'évolution de l'amplitude de diffusion g avec la distance d'observation R est présentée pour

- $\lambda/L_1 = 5$ sur la figure IV.9 avec $R_{Fr} \simeq 0.01 m$;
- $\lambda/L_1 = 2$ sur la figure IV.10 avec $R_{Fr} \simeq 0.25 m$;
- $\lambda/L_1 = 1$ sur la figure IV.11 avec $R_{Fr} \simeq 0.5 m$;
- $\lambda/L_1 = 0.875$ sur la figure IV.12 avec $R_{Fr} \simeq 0.57 m$

à l'aide des résultats de la simulation numérique directe. Les paramètres de la simulation sont (voir le paragraphe 1.2 du chapitre III) :

- configuration A1 pour $\lambda/L_1 \geq 1$;
- configuration B pour $\lambda/L_1 = 0.875$.

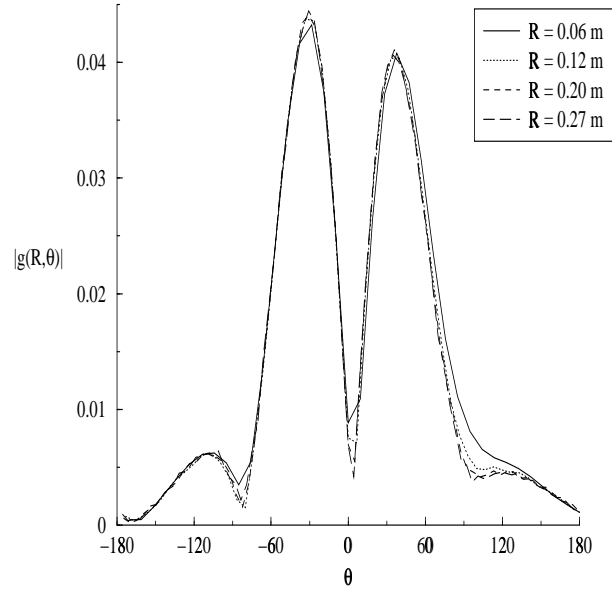


FIG. IV.9 – Amplitude de diffusion généralisée $|g(R, \theta)|$ dans le cas de la diffusion d'une onde plane incidente ($\lambda = 5 L_1 = 0.05 \text{ m}$) par un vortex de Taylor de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ (R est exprimé en mètres et θ en degrés).

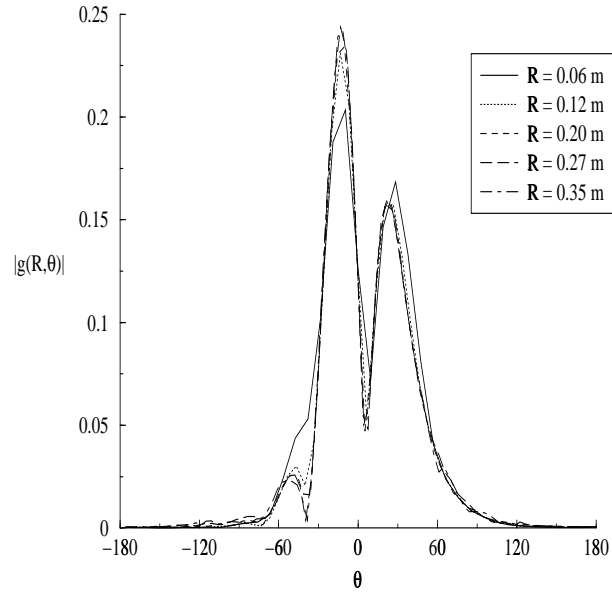


FIG. IV.10 – Amplitude de diffusion généralisée $|g(R, \theta)|$ dans le cas de la diffusion d'une onde plane incidente ($\lambda = 2 L_1 = 0.02 \text{ m}$) par un vortex de Taylor de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ (R est exprimé en mètres et θ en degrés).

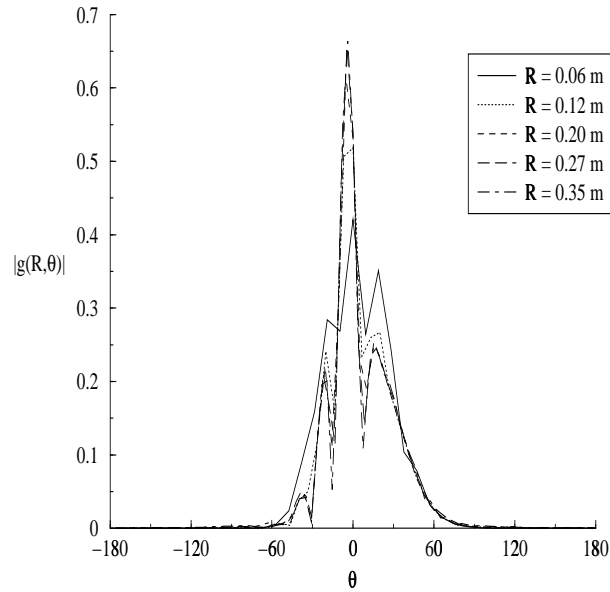


FIG. IV.11 – Amplitude de diffusion généralisée $|g(R, \theta)|$ dans le cas de la diffusion d'une onde plane incidente ($\lambda = L_1 = 0.01$ m) par un vortex de Taylor de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ (R est exprimé en mètres et θ en degrés).

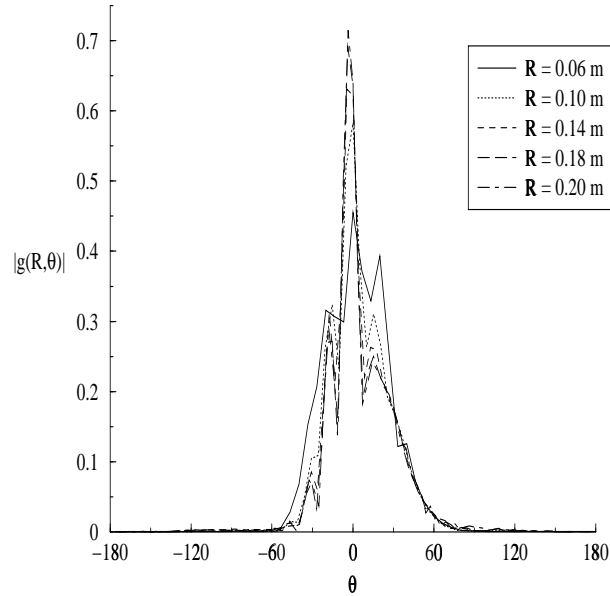


FIG. IV.12 – Amplitude de diffusion généralisée $|g(R, \theta)|$ dans le cas de la diffusion d'une onde plane incidente ($\lambda = 0.875 L_1 = 8.75 \cdot 10^{-3}$ m) par un vortex de Taylor de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ (R est exprimé en mètres et θ en degrés).

Nous avons uniquement pris en compte les acquisitions effectuées à l'extérieur du tourbillon, i.e. pour $R > 4 L_1 = 0.04 m$. Le nombre d'acquisitions angulaire dépend de R à cause du maillage utilisé : sur une largeur angulaire de 2π et pour un pas de grille $d_x = 7.81 \cdot 10^{-4} m = d_y$, on dispose ainsi de 38 « microphones » pour $R = 0.06 m$ et de 100 « microphones » pour $R = 0.4 m$. Ceci explique l'aspect découpé des profils de diffusion présentés.

Les figures IV.9-IV.12 montrent que le critère de champ lointain est assez facilement vérifié d'un point de vue pratique :

- pour $\lambda = 5 L_1$, l'amplitude g converge vers une valeur constante dès l'extérieur du tourbillon ($R > R_{Fr}$) et on peut considérer que l'on se trouve en champ lointain pour $R = 0.12 m \simeq 10 L_{Ta}$;
- pour $\lambda = 2 L_1$, l'amplitude g converge vers une valeur constante pour $R > 0.12 m$ et on peut considérer que l'on se trouve en champ lointain pour $R = 0.2 m \simeq 10 L_1 \simeq R_{Fr}$;
- pour $\lambda = L_1$ et $\lambda = 0.875 L_1$, la convergence de g a lieu pour $R \geq 0.18 m$, ce qui nous permet de considérer d'un point de vue pratique que l'on se trouve en champ lointain pour $R \geq 0.2 m \simeq 10 L_{Ta}$, ce qui correspond à $R \simeq 0.4 R_{Fr}$ pour ces deux longueurs d'onde.

Ainsi, la limite du champ lointain (1.16) n'est pas trop contraignante pour l'étude de la diffusion du son par un écoulement : nous considérerons, dans les simulations numériques comme lors de l'utilisation de la méthode des ondes partielles, que l'on se trouve en champ lointain dès que

$$R \simeq 0.5 R_{Fr} \quad \text{environ.} \quad (1.20)$$

Remarque : nous avons dégagé un critère quantitativement analogue dans le cas de l'écoulement polynomial et du dipôle de vorticité (paragraphe 2).

Cela présente un avantage certain en termes de simulation numérique car pour des longueurs d'onde $\lambda \leq L$, nous ne pouvons pas, pour des raisons pratiques, nous «  loigner » du cœur du tourbillon d'une distance supérieure à $R_{max} = 0.2 m = 20 L_1$.

De plus, cette analyse montre que, d'un point de vue expérimental, le critère de champ lointain est assez facile à respecter, si l'on est en mesure d'estimer avec précision la taille caractéristique L des objets diffusants étudiés.

1.4 Validité de l'approximation de Born

1.4.1 Introduction

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe à la validité de la première approximation de Born, qui est l'une des hypothèses majeures du calcul usuel de l'amplitude de

diffusion par un écoulement tourbillonnaire [Fab83, LR89]. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 3.7.3 du chapitre I, dans le cas où la circulation de l'écoulement est nulle, cette approximation est liée à un paramètre reliant les caractéristiques de l'écoulement et la longueur d'onde sonore : la première approximation de Born est vérifiée dans le cas de l'interaction d'une onde sonore de longueur d'onde λ avec un écoulement à circulation nulle et de taille caractéristique L si

$$\mu = \frac{2\pi L}{\lambda} \mathcal{M} = \beta \mathcal{M} \ll 1 \quad (1.21)$$

en introduisant le paramètre $\beta = 2\pi L/\lambda$ que nous avons déjà utilisé dans le cadre de l'acoustique géométrique (voir le paragraphe 2 du chapitre II).

Rappelons ici l'importance de considérer un écoulement dont la circulation globale est nulle : dans le cas contraire, l'amplitude de diffusion diverge lorsque $\theta \rightarrow 0$ dans le cadre de la première approximation de Born et le critère (1.21) n'a donc plus de sens.

Dans le cas de l'interaction son-écoulement, la première approximation de Born sera d'autant mieux vérifiée que le nombre de Mach \mathcal{M} est petit et que la longueur d'onde sonore est grande. Ainsi, pour un écoulement donné, l'approximation de Born sera mise en défaut dès que $\beta \simeq 1/\mathcal{M}$, ce qui signifie en termes de longueur d'onde $\lambda \simeq 2\pi L \mathcal{M}$.

1.4.2 Écoulement de référence

Afin d'étudier ces effets, nous avons choisi le tourbillon de Taylor décrit au paragraphe 1.2.1. Le seul paramètre que nous avons fixé pour l'ensemble de cette étude est la taille du cœur : $L_1 = 0.01 \text{ m}$ d'où $L = 0.01 \sqrt{2} \text{ m} \simeq 0.014 \text{ m}$. Ces tests de validité de la première approximation de Born ne peuvent être effectués que dans le cadre de l'approximation du champ lointain, où nous disposons de l'expression analytique de l'amplitude de diffusion [Fab83] (voir la relation (3.42) du paragraphe 3.7.2 du chapitre I et la discussion qui suit) :

$$f(\theta) \propto \cos(\theta) \cotan(\theta/2) \tilde{\Omega}_z(\vec{k}_R - \vec{k}_0) \quad (1.22)$$

où \vec{k}_0 est le vecteur d'onde incident, \vec{k}_R est le vecteur d'onde dans la direction d'observation θ et

$$\tilde{\Omega}_z(\vec{k}) = \int \Omega_z(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^2\vec{r} \quad (1.23)$$

est la transformée de Fourier spatiale de la vorticité.

Rappelons que cette expression n'est valable que dans le cadre des approximations de Born et du champ lointain pour un écoulement présentant une distribution de vorticité Ω de nombre de Mach $\mathcal{M} \ll 1$ et de temps caractéristique d'évolution $T_U \gg T = \lambda/c$.

Dans le cas du vortex de Taylor, l'amplitude de diffusion a pour expression (relation 3.48 du paragraphe 3 du chapitre I)

$$f_T(\theta) = \Omega_0 \frac{8L_1^4 \pi^3 \exp(1/2)}{c \lambda^2} \sqrt{\frac{i}{\lambda}} \cos(\theta) \sin(\theta) \exp \left[-2 \left(\frac{2\pi L_1}{\lambda} \sin(\theta/2) \right)^2 \right] \quad (1.24)$$

que l'on peut exprimer à l'aide de la relation (1.10) sous la forme

$$f_T(\theta) = \mathcal{M} \operatorname{signe}(\Omega_0) \left(\frac{L_1}{\lambda} \right)^{5/2} 8\pi^3 \sqrt{i L_1} \exp(1/2) \cos(\theta) \sin(\theta) \exp \left[-2 \left(\frac{2\pi L_1}{\lambda} \sin(\theta/2) \right)^2 \right] \quad (1.25)$$

et qui s'exprime en $m^{1/2}$.

Remarque : dans la limite des grandes longueurs d'onde $\lambda \gg L_1$, l'amplitude de diffusion se comporte comme

$$f_T(\theta) \simeq \frac{1}{\lambda^{5/2}} \sin(2\theta) \quad (1.26)$$

et la section efficace différentielle de diffusion se comporte comme

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = |f_T(\theta)|^2 \simeq \frac{1}{\lambda^5} \sin(2\theta)^2 \quad (1.27)$$

ce qui est conforme à un comportement quadrupolaire de l'écoulement bidimensionnel dans la limite des grandes longueurs d'onde ([Jac75] paragraphe 9.4).

1.4.3 Diffusion du son

D'après la relation (1.21), l'approximation de Born est vérifiée si $\lambda \gg 2\pi L \mathcal{M}$ avec $L = L_1 \sqrt{2}$ dans le cas du vortex de Taylor. Nous avons effectué plusieurs simulations numériques à l'aide des configurations A1 et A2 détaillées au paragraphe 1.2 du chapitre III et pour plusieurs nombres de Mach : $0.0016 \leq \mathcal{M} \leq 0.64$. Nous ne nous intéresserons pas ici directement à l'effet de nombre de Mach ou de la longueur d'onde mais à l'effet du paramètre $\mu = \beta \mathcal{M}$ sur la diffusion du son. Ainsi, la procédure suivie consiste, pour chaque écoulement, i.e. chaque nombre de Mach, à étudier l'influence de μ en étudiant la diffusion pour les grandes longueurs d'onde et en diminuant progressivement la longueur d'onde. Ainsi, lorsque $\lambda \simeq 2\pi L \mathcal{M}$, on peut s'attendre à ce que la première approximation de Born ne soit plus valide.

Nous présentons sur la figure IV.13 l'amplitude de diffusion f pour différents rapports λ/L , évaluée dans la limite du champ lointain conformément aux résultats du paragraphe 1.3, et nous la comparons avec la prédiction théorique fourni par la relation (1.25). Le nombre de Mach du tourbillon est $\mathcal{M} = 0.16$ avec $\Omega_0 < 0$. Dans chaque cas, nous précisons la valeur du paramètre μ afin de quantifier la validité de la première approximation de Born :

- $\mu \leq 0.5$ l'approximation de Born est bien vérifiée, malgré une faible disymétrie de l'amplitude de diffusion, liée au sens de rotation de l'écoulement : l'écoulement tourne dans le sens anti-trigonométrique puisque $\Omega_0 < 0$ (voir aussi le paragraphe 1.5) ;
- $\mu > 0.5$ l'accord avec la première approximation de Born est de moins en moins bon et, pour de petites longueurs d'onde, l'ordre de grandeur du maximum de

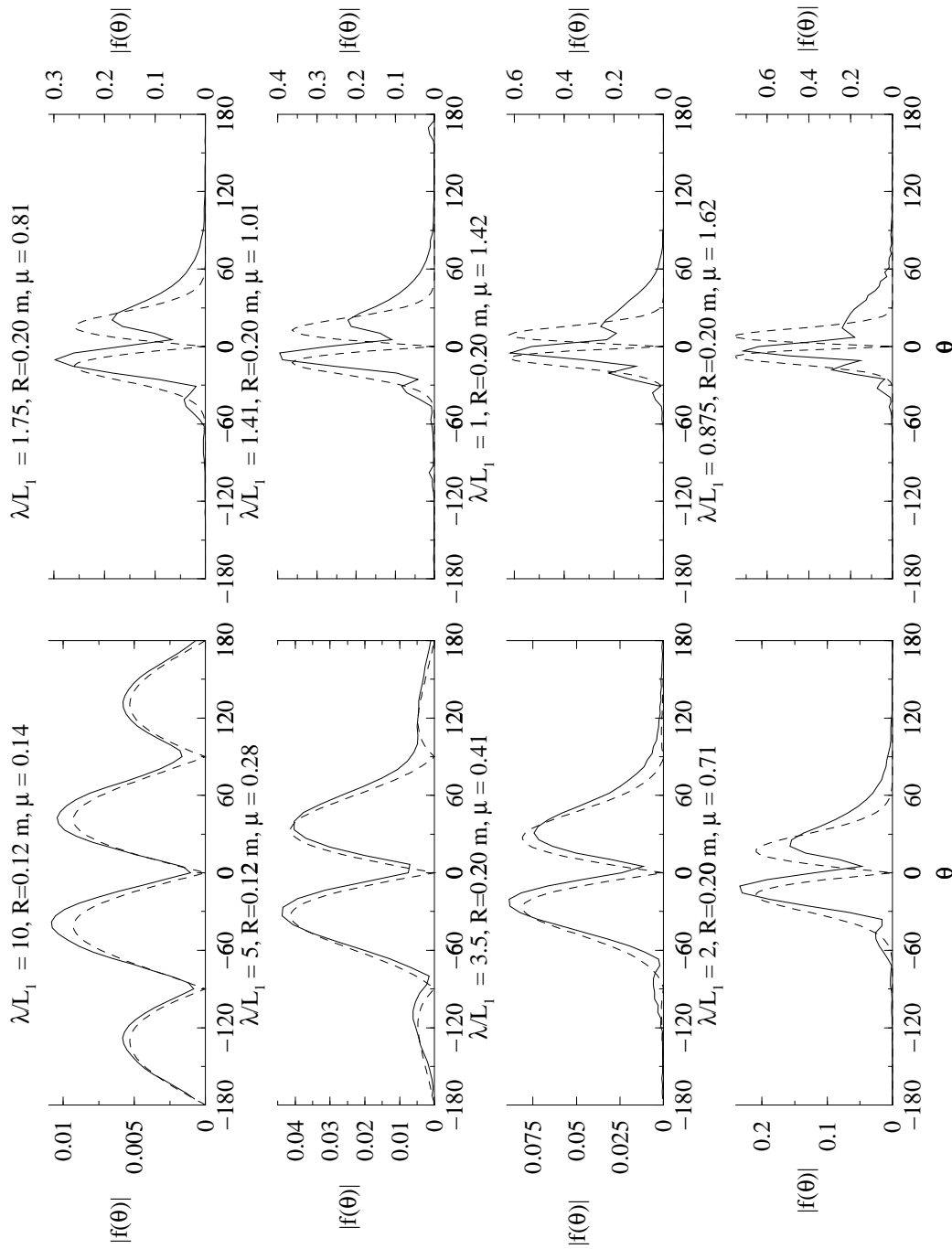


FIG. IV.13 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un vortex de Taylor de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ (θ est exprimé en degrés): (—) résultat numérique, (---) résultat analytique déduit de la relation (1.25) dans le cadre de la première approximation de Born.

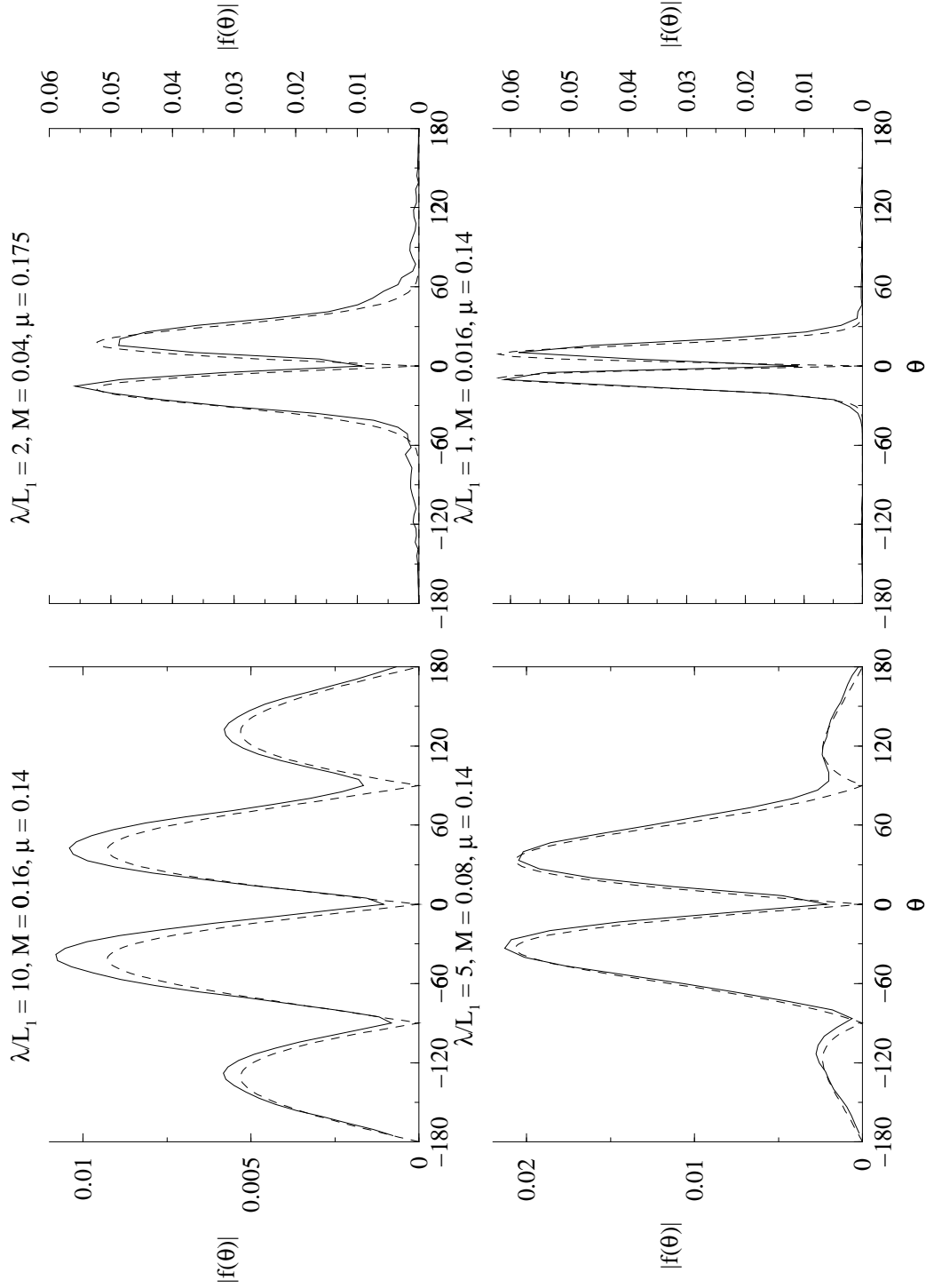


FIG. IV.14 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un vortex de Taylor, de nombre de Mach μ/β pour $\mu \simeq 0.14$ (θ est exprimé en degrés): (—) résultat numérique, (--) résultat analytique déduit de la relation (1.25).

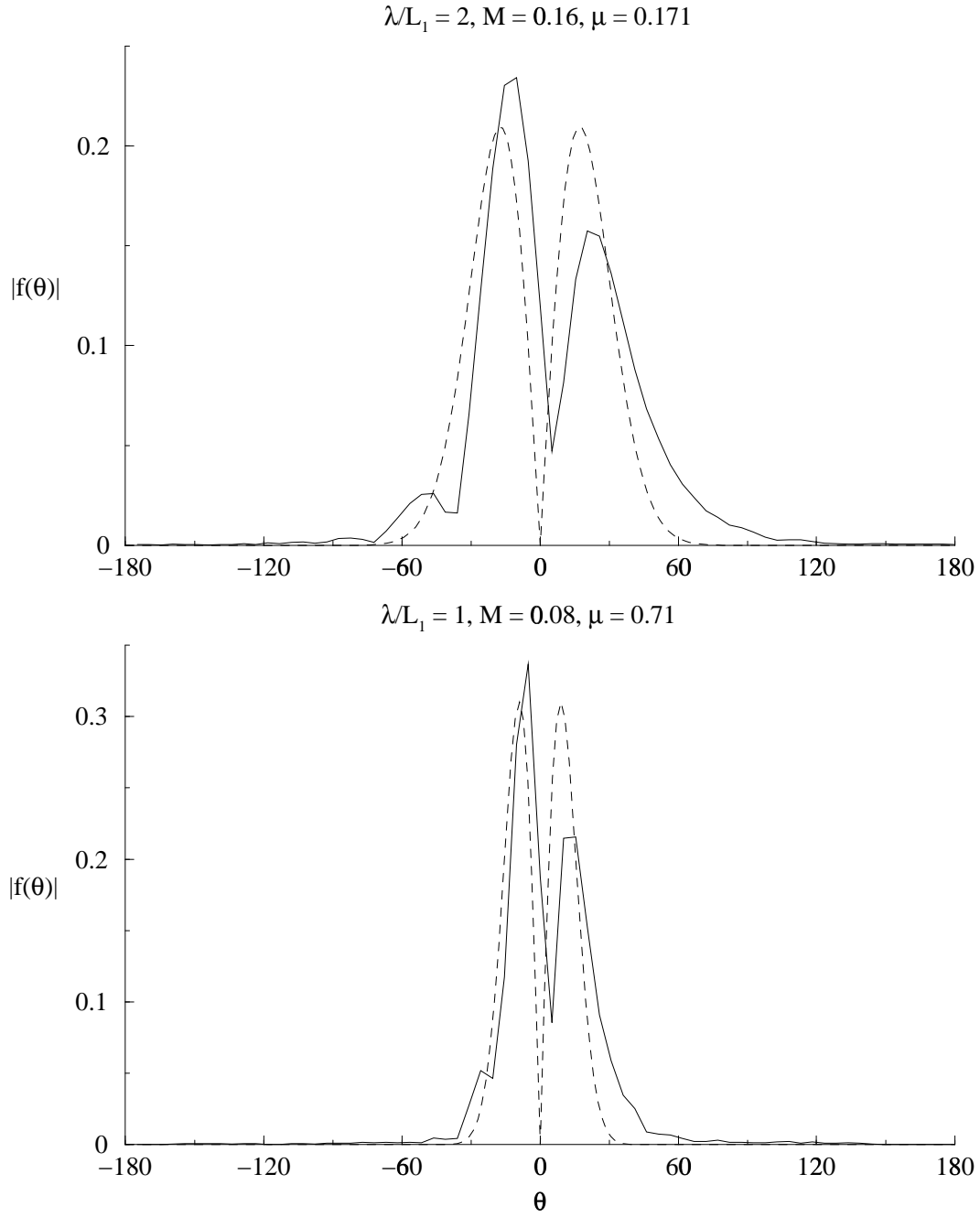


FIG. IV.15 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un vortex de Taylor, de nombre de Mach μ/β pour $\mu \simeq 0.71$ (θ est exprimé en degrés): (—) résultat numérique, (--) résultat analytique déduit de la relation (1.25).

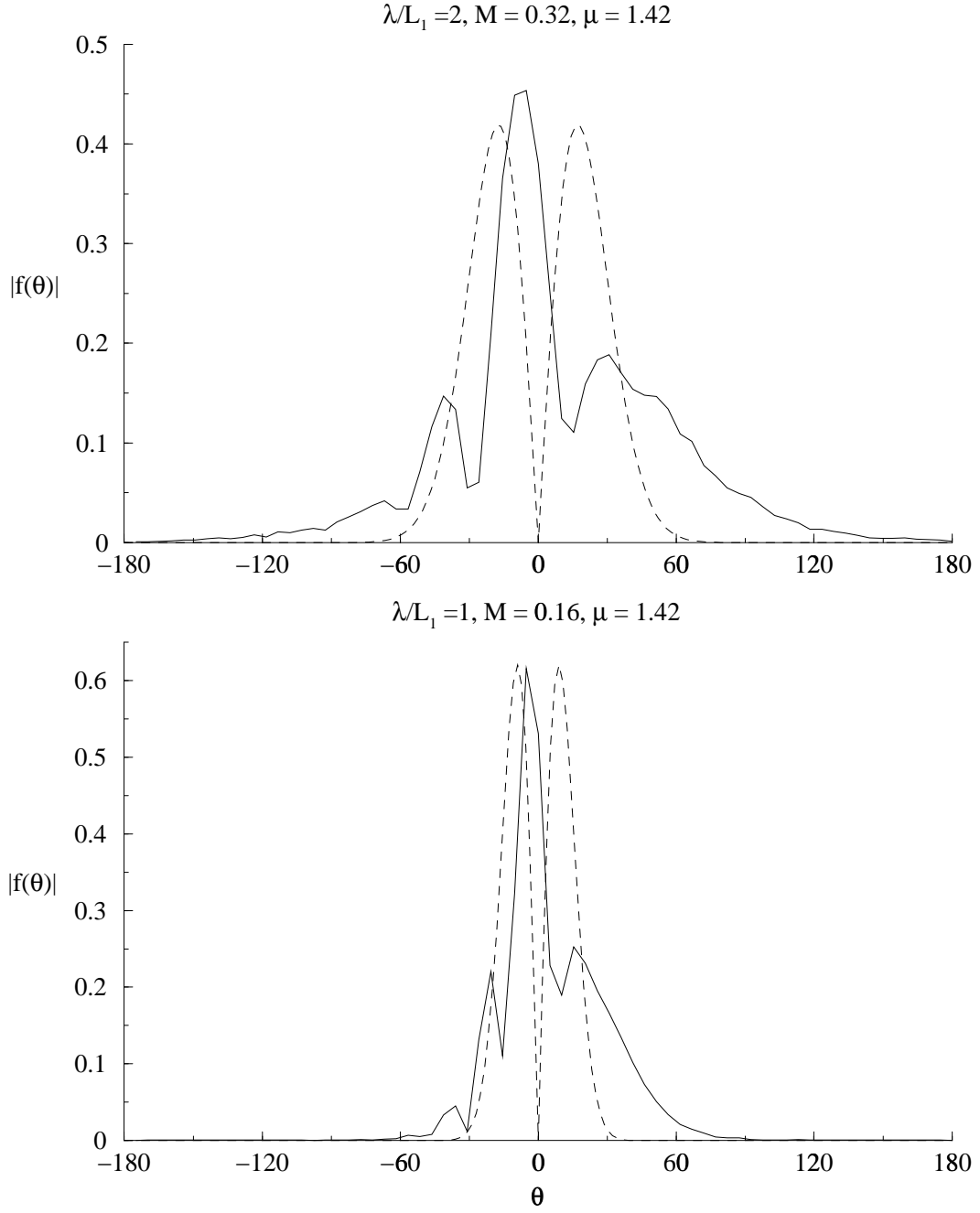


FIG. IV.16 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un vortex de Taylor, de nombre de Mach μ/β pour $\mu \simeq 1.42$ (θ est exprimé en degrés): (—) résultat numérique, (--) résultat analytique déduit de la relation (1.25).

l'amplitude de diffusion n'est plus conforme à la prédiction théorique ($\lambda/L_1 = 0.875$ par exemple). Nous reviendrons sur l'influence de la longueur d'onde sur la diffusion au paragraphe 1.7.

De plus, l'effet du sens de rotation sur l'amplitude de diffusion est de plus en plus important. Cette dissymétrie de la figure de diffusion est directement liée à l'advection des ondes sonores par l'écoulement, comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre II lors de l'analyse géométrique ($\lambda/L \ll 1$) de la diffusion du son. Il est donc cohérent que ce phénomène apparaisse pour les petites longueurs d'onde ($\lambda/L \simeq 1$) car les effets géométriques vont devenir prépondérants et l'onde sonore sera de plus en plus sensible à la structure « locale » de l'écoulement. Nous reviendrons sur cette dissymétrie au paragraphe 1.5.

Cela est confirmé sur les figures IV.14 ($\mu \simeq 0.14$), IV.15 ($\mu \simeq 0.71$) et IV.16 ($\mu \simeq 1.42$) qui présentent l'allure de l'amplitude de diffusion f pour μ fixé : lorsque μ est petit, l'accord avec la prédiction théorique (1.25) est bon (figure IV.14 pour $\mu \simeq 0.14$). Par contre, lorsque μ augmente, l'écart à l'approximation de Born devient manifeste, indépendamment du nombre de Mach de l'écoulement. μ apparaît donc bien comme le paramètre de contrôle de la validité de la première approximation de Born.

1.4.4 Conclusion

Comme nous l'avons constaté à travers les différentes courbes présentées, le paramètre $\mu = \beta \mathcal{M}$ caractérise la validité de la première approximation de Born. Dans le cas du tourbillon de Taylor, cette approximation est vérifiée si $\mu \leq 0.5$. Dans le cas contraire, l'amplitude de diffusion n'est plus symétrique par rapport à la direction d'incidence $\theta = 0$ et des « oscillations » apparaissent. De plus, l'amplitude de diffusion f est maximale pour un angle de diffusion $\theta \simeq 0$.

Il faut remarquer qu'expérimentalement, le critère $\mu \ll 1$ est généralement assez bien respecté, ce qui assure le succès de l'utilisation des méthodes ultrasonores pour l'étude de la turbulence à l'aide de l'expression (1.22), le critère de champ lointain étant beaucoup plus facile à respecter comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3.

Le paramètre μ prend en compte à la fois l'effet de la longueur d'onde par l'intermédiaire du rapport λ/L et le nombre de Mach de l'écoulement. Il nous semble donc intéressant de nous intéresser à ces deux paramètres séparément, afin de mieux cerner l'évolution de la forme de l'amplitude de diffusion.

1.5 Effet du sens de rotation de l'écoulement

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats de simulations numériques effectuées dans le cas du tourbillon de Taylor avec $L = L_1\sqrt{2}$ et $\mathcal{M} \simeq 0.16$. Nous avons effectué ces simulations avec la configuration A2, pour $\lambda = 2L$ et $\lambda = L$ afin de nous assurer que la dissymétrie de la figure de diffusion que nous avons observée au paragraphe 1.4

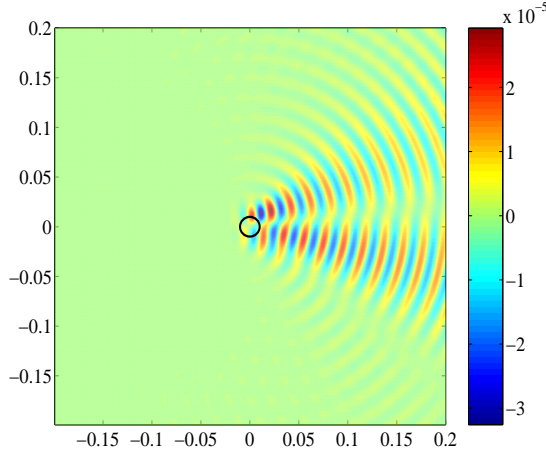


FIG. IV.17 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ avec $\Omega_0 < 0$, pour $\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

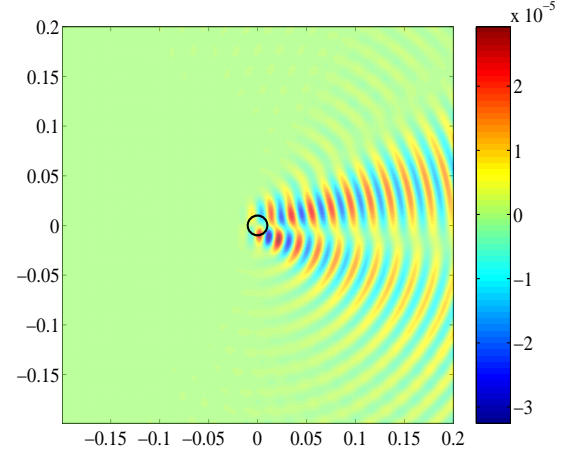


FIG. IV.18 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ avec $\Omega_0 > 0$, pour $\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

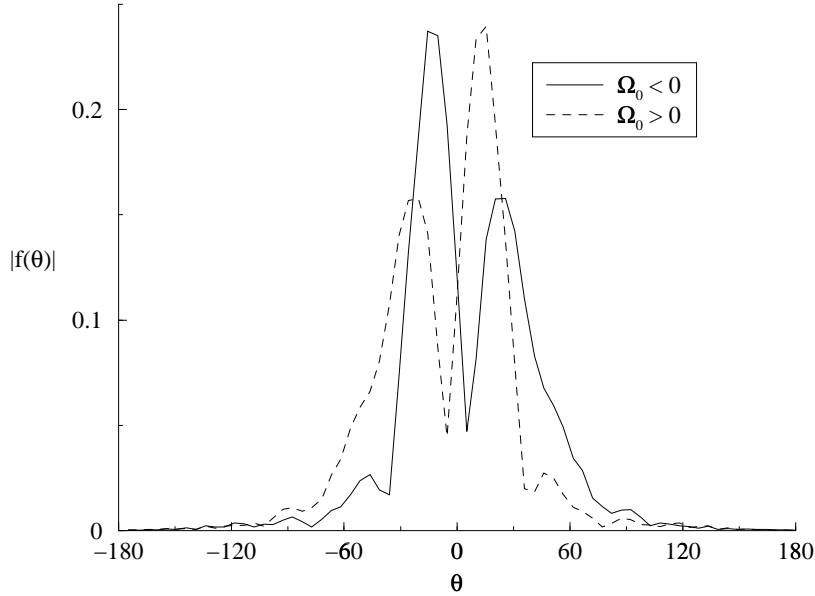


FIG. IV.19 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente ($\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$) et un vortex de Taylor, de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ (θ est exprimé en degrés).

correspond bien à un effet de rotation de l'écoulement moyen, et est donc directement lié au phénomène d'advection des ondes sonores par l'écoulement. Les figures IV.17 et IV.18 montrent l'allure du champ diffusé pour $\lambda/L = 2$, la figure IV.19 présentant quant à elle l'allure de l'amplitude de diffusion. Il apparaît clairement que le maximum de l'amplitude de diffusion, qui correspond à une interaction maximale entre le tourbillon et l'onde sonore, dépend directement du sens de rotation dans le cœur du vortex.

Lorsque la diffusion devient importante ($\lambda \simeq L$), les ondes diffusées sont sensibles à la réfraction par l'écoulement. La détection du maximum de diffusion peut ainsi servir de test pour analyser le sens de rotation d'un écoulement axisymétrique.

1.6 Influence du nombre de Mach

Nous pouvons maintenant nous intéresser de manière plus précise à l'influence du nombre de Mach \mathcal{M} sur la diffusion du son. Pour cela, nous avons choisi le tourbillon de Taylor avec $L_1 = 0.01 m$ ($L = L_1\sqrt{2}$) et nous avons effectué plusieurs simulations numériques pour différents nombre de Mach, dans les configurations A1 et A2. Cela nous permet de comparer, pour une longueur d'onde sonore λ donnée, l'effet de ce paramètre sur la diffusion du son.

Dans le cadre de l'approximation de Born, l'amplitude de diffusion f est proportionnelle au nombre de Mach \mathcal{M} et la section efficace totale de diffusion

$$\sigma_{diff} = \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \quad (1.28)$$

est donc proportionnelle à \mathcal{M}^2 . Comme nous pouvons le constater dans le cas du tourbillon de Taylor (1.25), le facteur de proportionnalité fait intervenir le rapport λ/L de manière non triviale.

La figure IV.20 présente l'évolution de la section efficace de diffusion en fonction du nombre de Mach \mathcal{M} pour différentes valeurs du rapport λ/L , en échelle log-log. La valeur du paramètre μ est précisée pour certains points expérimentaux. On constate, pour de petites valeurs de μ , que $\log(\sigma_{diff})$ est bien proportionnel à $\log(\mathcal{M})$, avec une pente de 2. Cependant, pour un rapport $\lambda/L_1 = 10$, σ_{diff} n'est pas tout à fait proportionnel à \mathcal{M}^2 , car l'amplitude de diffusion est très faible et la précision du résultat numérique n'est pas très bonne, à cause des réflexions numériques sur les frontières du domaine, dont nous avons déjà discuté l'importance au paragraphe 5.1 du chapitre III.

Le rapport $\lambda/L_1 = 1$ permet de mettre en défaut l'approximation de Born, pour des nombres de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$ et $\mathcal{M} \simeq 0.28$. On constate une rupture de pente qui caractérise la non validité de l'approximation de Born, pour des valeurs de $\mu = (2\pi/L_1)\mathcal{M} \simeq 1$.

De plus, pour une longueur d'onde donnée, une diminution du nombre de Mach implique une diminution de la section efficace de diffusion. Ceci est cohérent avec le rôle central des gradients de vitesse dans la diffusion : plus le nombre de Mach est petit, plus les gradients de vitesse sont faibles et moins la diffusion est performante.

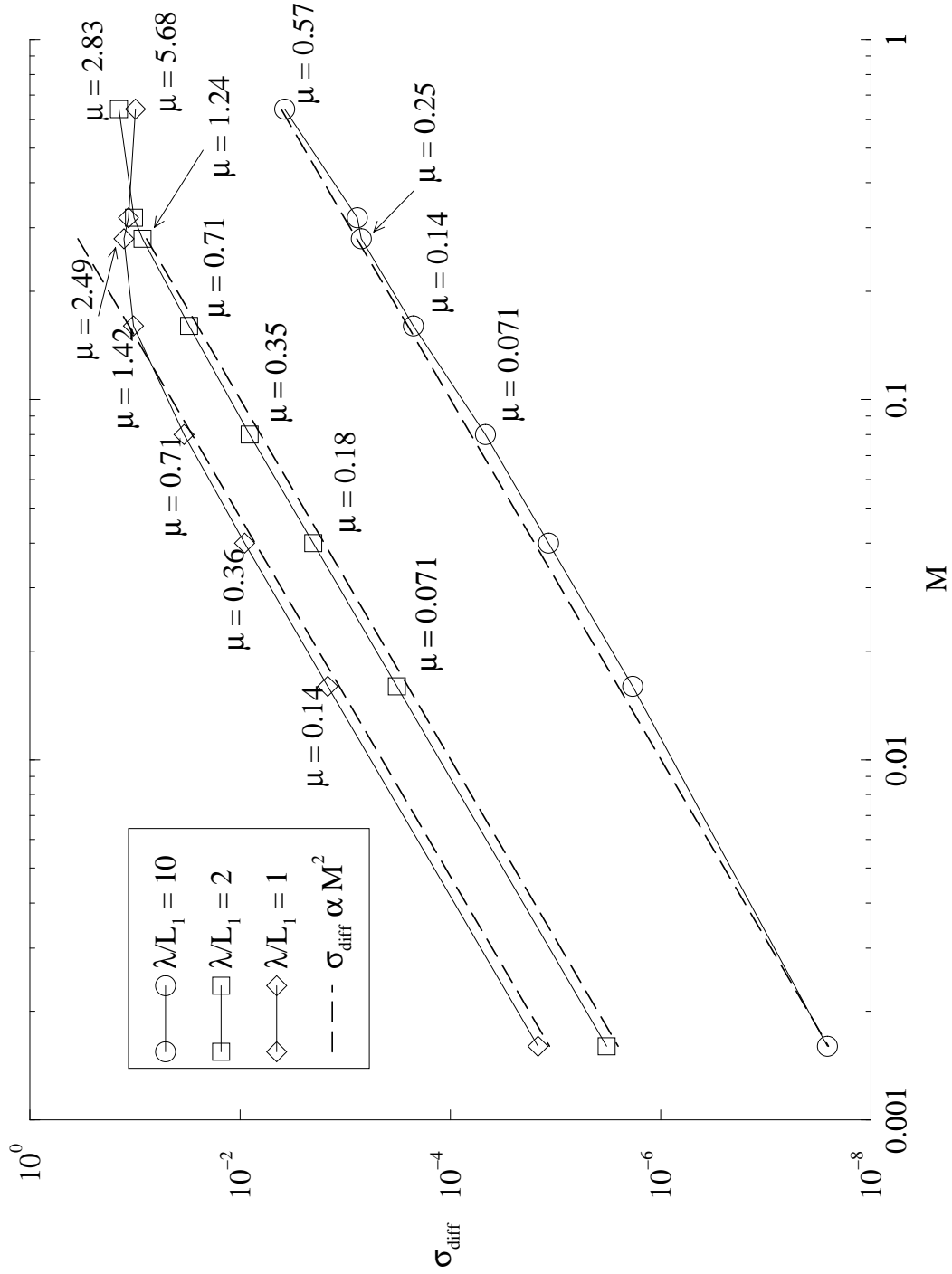


FIG. IV.20 – Section efficace totale de diffusion σ_{diff} en fonction du nombre de Mach M dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un vortex de Taylor, en échelle log-log.

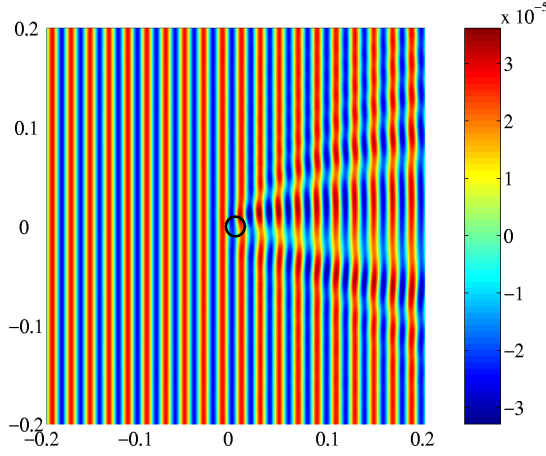


FIG. IV.21 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.08$, pour $\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

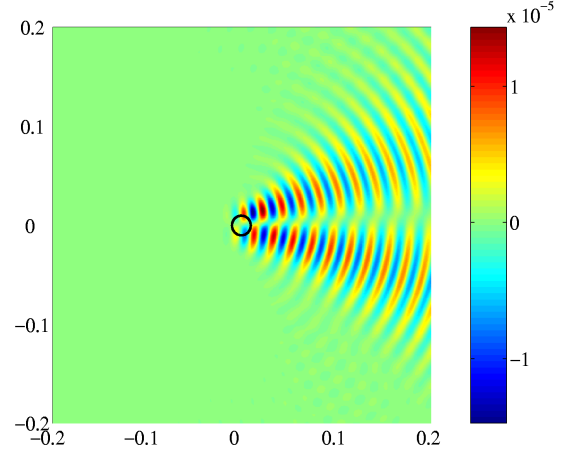


FIG. IV.22 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.08$, pour $\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

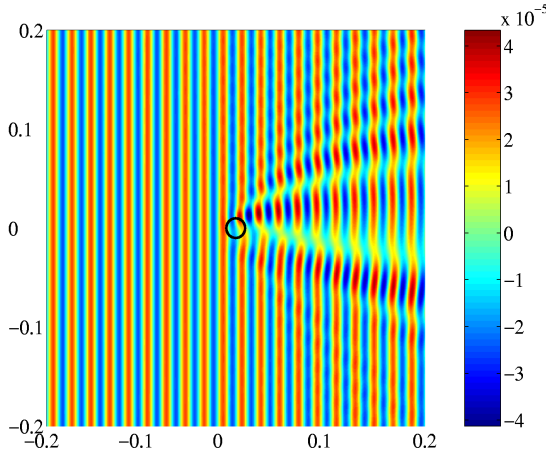


FIG. IV.23 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

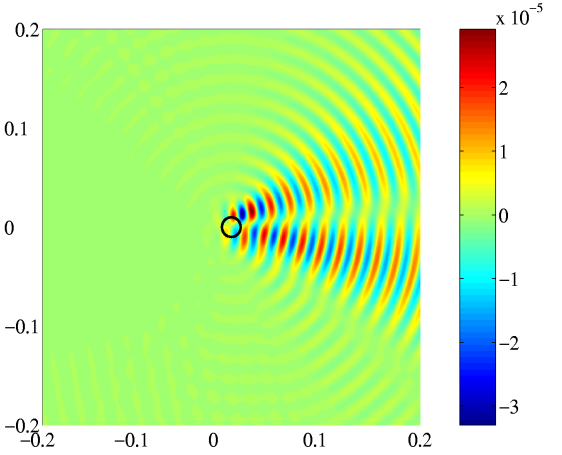


FIG. IV.24 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

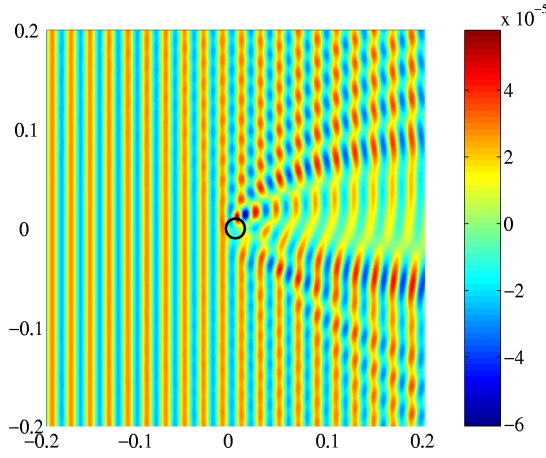


FIG. IV.25 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.32$, pour $\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

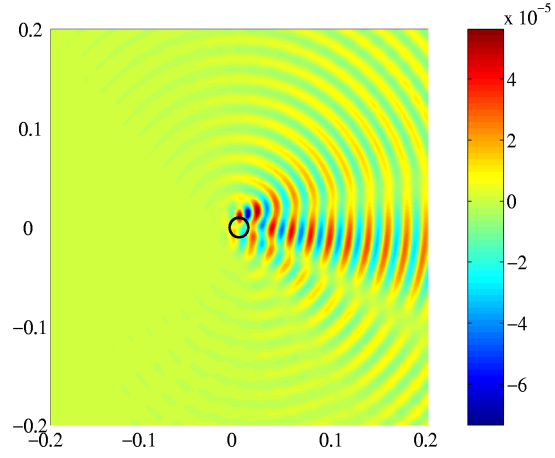


FIG. IV.26 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.32$, pour $\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

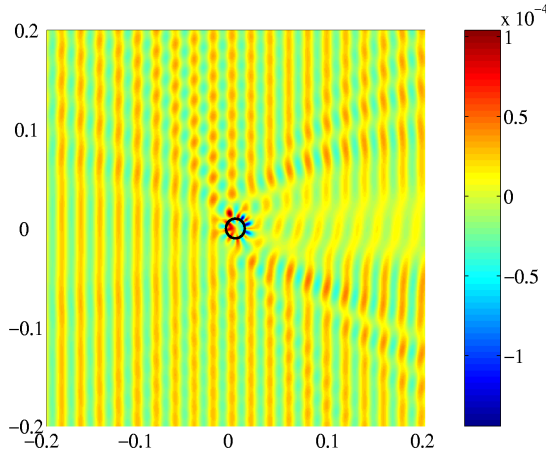


FIG. IV.27 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.64$, pour $\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

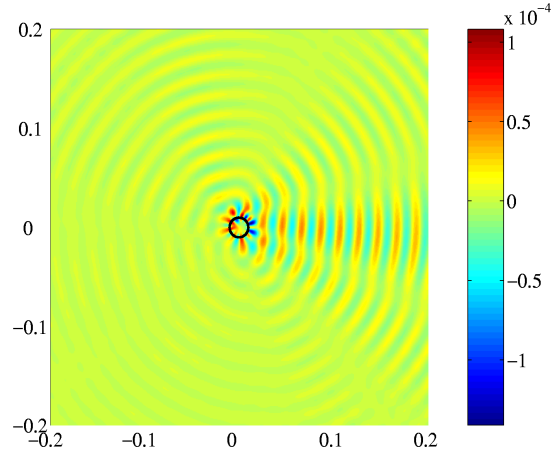


FIG. IV.28 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.64$, pour $\lambda = 2L = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

Les figures IV.21-IV.28 présentent les champs ρ_s et diffusé ρ_{diff} de la masse volumique de l'onde sonore, pour $\lambda/L_1 = 2$. Lorsque le nombre de Mach est suffisamment élevé, ce qui correspond à un paramètre $\mu \simeq 1$ pour lequel l'approximation de Born n'est plus valide, les ondes diffusées ont l'allure de spirales. Des ondes spirales ont été observées expérimentalement par Vivanco et al. [VM00] et prédites analytiquement par Umeki et al. [UL97]. Ces prédictions ont été effectuées dans le cadre de l'approximation de l'acoustique géométrique en utilisant l'équation d'Obukov (voir le paragraphe 1.6 du chapitre I) à l'aide de la méthode des ondes partielles (voir le paragraphe 2 du chapitre II), qui conduit à introduire le paramètre de dislocation (ν est la pulsation de l'onde sonore)

$$\alpha = \frac{\nu \Gamma}{2\pi c_0^2} \simeq \frac{U L}{\lambda c} = \mathcal{M} \frac{L}{\lambda} \simeq \frac{\mu}{2\pi}. \quad (1.29)$$

Pour obtenir des ondes spirales, il faut $\alpha \simeq 1$, ce qui impose $\mu \simeq 1$. Cette analyse est conforme aux observations des figures IV.25-IV.28.

Remarque : il faut noter ici que pour $\mathcal{M} \simeq 0.64$, l'approximation $\mathcal{M} \ll 1$, qui est usuellement employée dans le cadre théorique de la diffusion du son par la vorticité (voir les paragraphes 3 et 1.6 du chapitre I), n'est plus vérifiée. Ainsi, l'analogie que nous venons de faire ne peut que rester formelle, car elle est basée sur des résultats s'appuyant sur l'hypothèse d'un nombre de Mach $\mathcal{M} \ll 1$.

1.7 Influence de la longueur d'onde sonore

1.7.1 Introduction

Nous avons également étudié l'effet de la longueur d'onde sur la diffusion du son. Dans ce cas, nous travaillons avec un écoulement donné (nombre de Mach \mathcal{M} et profil de vorticité donné) et nous avons varié la longueur d'onde de l'onde sonore incidente. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à deux grandeurs caractéristiques de la diffusion : l'amplitude de diffusion f et la section efficace totale de diffusion σ_{diff} dont nous avons rappelé la définition par la relation (1.28).

Pour cela, nous avons étudié les deux écoulements décrits au paragraphe 1.2 :

- l'écoulement de Taylor (1.2.1) avec $L_1 = 0.01 m = L_{ref}$ ($L_{Ta} = L_1 \sqrt{2}$) et $\mathcal{M} \simeq 0.16$. Nous avons effectué des simulations numériques avec les configurations A1 pour $\lambda/L_{ref} \geq 1$ et B pour $\lambda/L_{ref} < 1$, afin de ne pas altérer la précision numérique de la simulation pour la modélisation des phénomènes propagatifs.

Il faut cependant noter que la condition de champ lointain n'est plus toujours vérifiée pour simulations que nous avons faites avec la configuration B ($0.375 \leq \lambda/L_{ref} < 1$) : en effet, dans la configuration B, la distance d'observation R vérifie $R \leq 0.2$ tandis que la distance de Fraunhofer

$$R_{Fr} = \frac{2\pi L_{Ta}^2}{\lambda} \quad (1.30)$$

(relation (1.16) prend les valeurs :

	$\frac{\lambda}{L_{ref}} = 1$	$\frac{\lambda}{L_{ref}} = 0.875$	$\frac{\lambda}{L_{ref}} = 0.75$	$\frac{\lambda}{L_{ref}} = 0.625$	$\frac{\lambda}{L_{ref}} = 0.375$
$R_{Fr} \simeq$	$1.26.10^{-1} m$	$1.44.10^{-1} m$	$1.68.10^{-1} m$	$2.00.10^{-1} m$	$3.35.10^{-1} m$

Ainsi, la validité des résultats pour $\lambda/L_{ref} \leq 0.75$ n'est pas évidente car le critère de champ lointain que nous avons quantifié au paragraphe 1.20 n'est plus respecté. Un domaine de calcul plus grand serait nécessaire pour valider clairement ces résultats. De plus, la simulation numérique effectuée pour $\lambda/L_{ref} = 0.375$ est à la limite inférieure de résolution correcte du problème, car ce choix de paramètres correspond à moins de 10 points de grille par longueur d'onde, ce qui implique une dissipation numérique importante, comme nous l'avons vu au paragraphe 4.4 du chapitre III ;

- l'écoulement polynomial (1.2.2) employé conjointement avec la simulation numérique et la méthode des ondes partielles développée au paragraphe 2 du chapitre II. Nous avons choisi $L_1 = L_{Ta} = L_{ref}\sqrt{2} \simeq 1.4.10^{-2} m$ ($L = L_1$ pour ce tourbillon) et $\mathcal{M} \simeq 0.15$. Nous avons utilisé la simulation numérique pour $\lambda/L_{ref} \geq 1$ et la méthode des ondes partielles pour $\lambda/L_{ref} < 1$, en nous assurant, avec cette méthode, que l'amplitude de diffusion était bien calculée dans l'approximation de champ lointain.

1.7.2 Évolution de l'amplitude de diffusion

Les structures des deux tourbillons sont très proches (même taille du cœur $L_{Ta} \simeq 1.4.10^{-2} m$, vorticité Ω_0 de même ordre de grandeur) comme le montre la figure IV.29. Ainsi, les résultats de la diffusion par ces deux écoulements seront analogues et complémentaires dans le régime des petites longueurs d'onde $\lambda/L_{ref} < 1$.

Les figures IV.30 et IV.31 présentent l'allure de l'amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ pour plusieurs rapports λ/L_{ref} , dans le cas du tourbillon de Taylor. Ces résultats sont déduits de la simulation numérique, avec les réserves déjà évoquées plus haut concernant la validité du critère de champ lointain pour les petites longueurs d'onde. Pour chaque courbe, nous avons précisé la distance d'observation R , la valeur du paramètre $\mu = 2\pi L_{Ta} \mathcal{M}/\lambda$ ainsi que la position des « microphones » d'acquisition numérique des signaux par des (O).

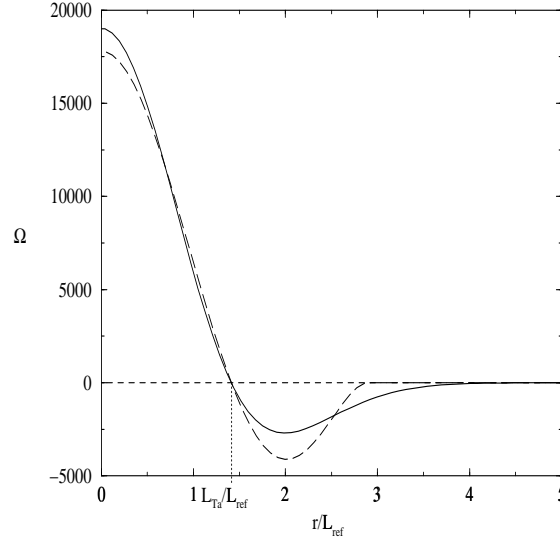


FIG. IV.29 – Vorticité Ω (en s^{-1}) en fonction de r/L_{ref} (Ω est en s^{-1}): (—) vortex de Taylor, (---) vortex polynomial.

On peut tout d'abord noter qu'à grande longueur d'onde ($\lambda = 10L_{ref}$), l'écoulement se comporte bien comme un quadrupole et le diagramme de diffusion comprend quatres lobes, de manière analogue au rayonnement quadrupolaire en électromagnétisme ([Jac75] paragraphe 9.4). Cependant, les deux lobes arrières ont une intensité plus faible que les lobes avants car la longueur d'onde choisie n'est probablement pas encore assez grande pour que le système se trouve réellement dans un régime « grande longueur d'onde » tel que nous l'avons décrit au paragraphe 1.2.3 et dans la remarque du paragraphe 1.4.2: $f(\theta) \propto \sin(2\theta)$. L'amplitude de diffusion étant faible (moins de 1%), l'onde diffusée est bruitée, au voisinage des frontières, par les réflexions parasites (voir le paragraphe 5.1 du chapitre III). Ces oscillations dues au « bruit numérique » s'estompent si l'on s'éloigne des frontières, tout en restant dans l'approximation du champ lointain (figure IV.9).

Lorsque la longueur d'onde diminue, la dissymétrie de l'amplitude de diffusion par rapport à la direction d'incidence $\theta = 0$ s'accroît et la position du maximum de diffusion tend vers $\theta = 0$. De plus, pour de faibles longueurs d'onde $\lambda/L_{ref} \leq 0.875$, des oscillations apparaissent autour du maximum (situé autour de $0^\circ \leq \theta \leq 1^\circ$) avec notamment un pic secondaire situé en $\theta \simeq -14^\circ$ qui devient d'amplitude non négligeable par rapport à celle du ou des pics centraux pour $\lambda/L_{ref} = 0.5$.

Cette situation est conforme à l'analyse que nous fournit l'acoustique géométrique à l'aide du tracé de rayons, dont nous avons exposé la méthode au paragraphe 2.2.2 du chapitre II. Rappelons que cette méthode n'est valable que dans la limite des très petites longueurs d'onde $\lambda/L_{ref} \ll 1$. La figure IV.32 présente la tracé des rayons acoustiques pour le vortex de Taylor, dont la vorticité est schématisée par les deux cercles centrés en $x = 0 = y$. On constate une forte concentration de rayons pour un angle θ_{geom} que l'on

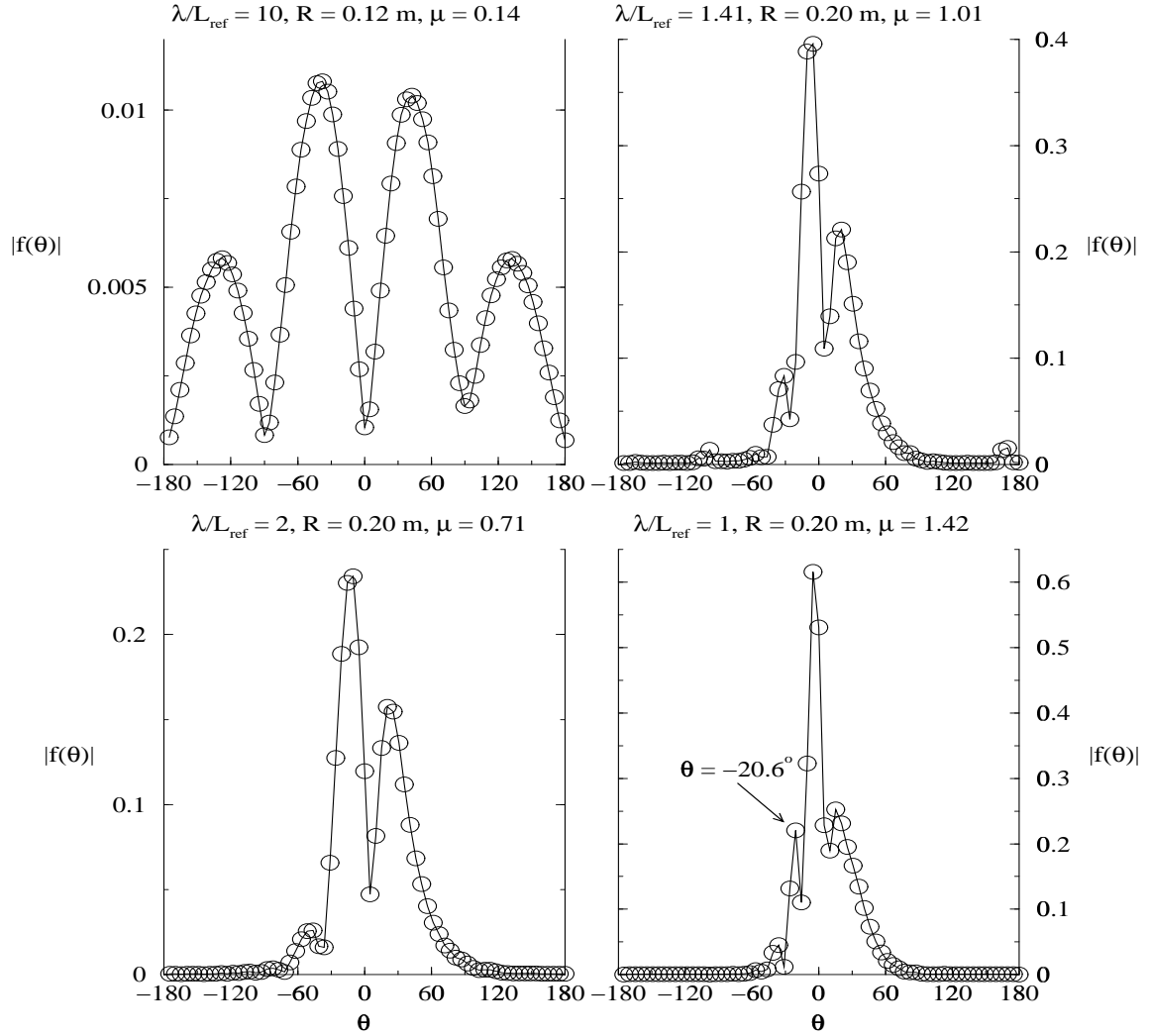


FIG. IV.30 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (exprimé en degrés) dans le cas de la diffusion d'une onde plane par un vortex de Taylor de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$. Les (O) représentent la position des microphones d'acquisition numérique.

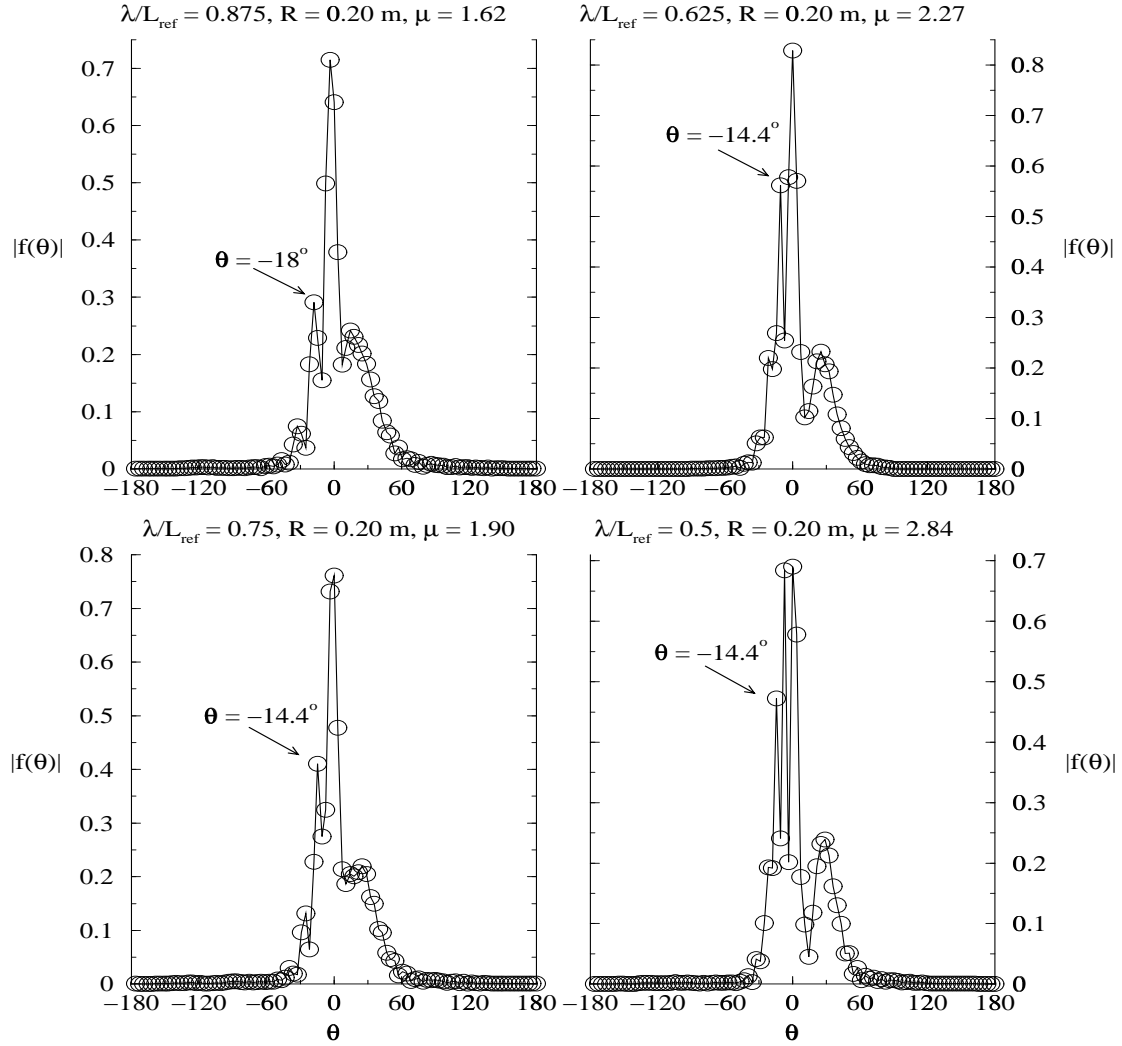


FIG. IV.31 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (exprimé en degrés) dans le cas de la diffusion d'une onde plane par un vortex de Taylor de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$. Les (O) représentent la position des microphones d'acquisition numérique.

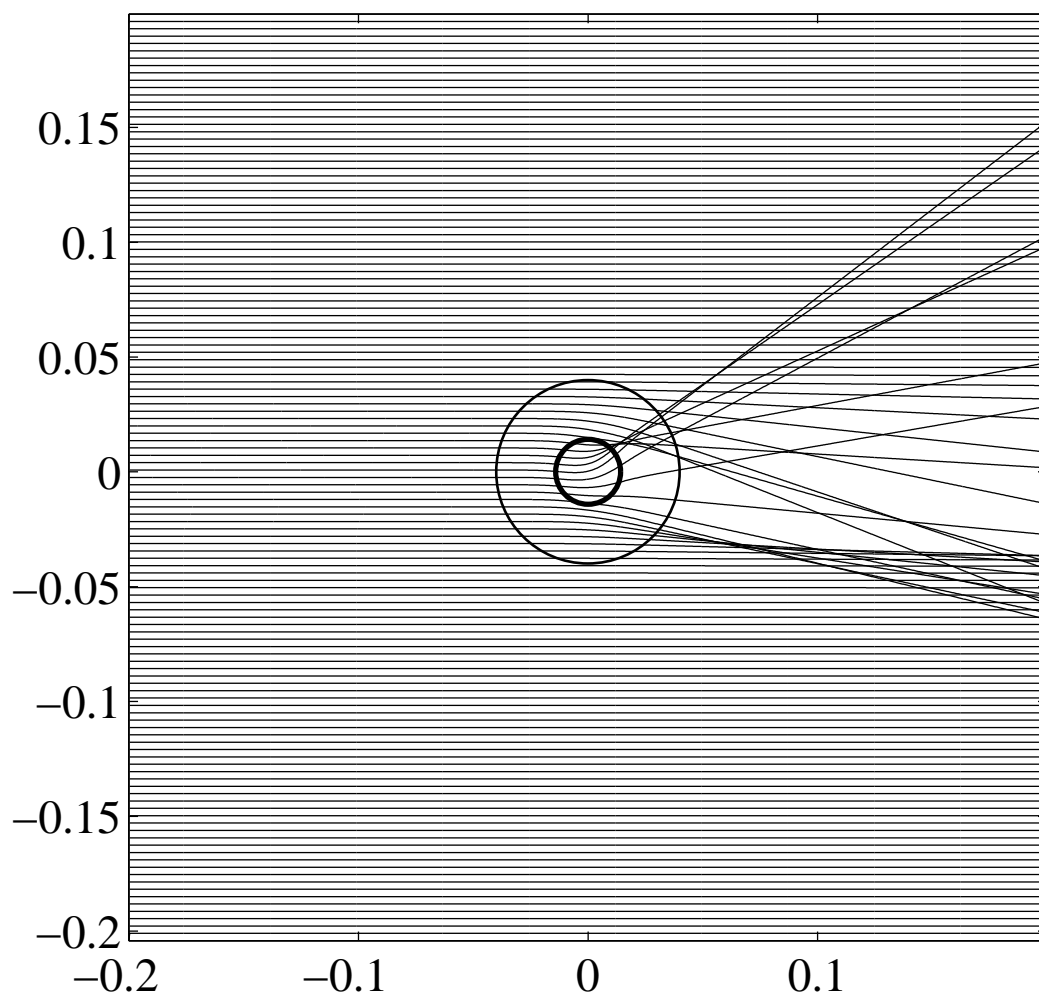


FIG. IV.32 – Réfraction des rayons acoustiques par un tourbillon de Taylor ($\mathcal{M} \simeq 0.16$) avec $\Omega_0 < 0$. Les deux cercles représentent les tailles caractéristiques L_{Ta} et $4L_{ref}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

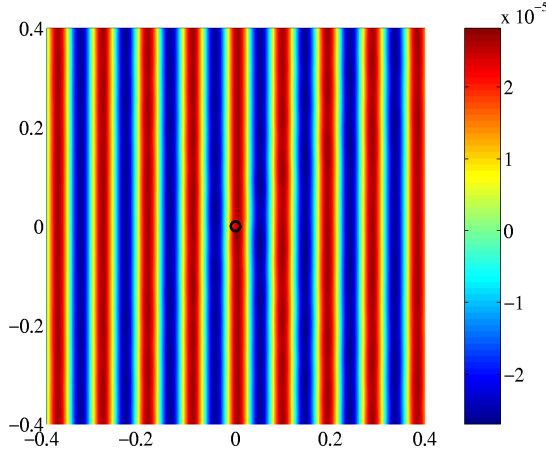


FIG. IV.33 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 10L = 0.1$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

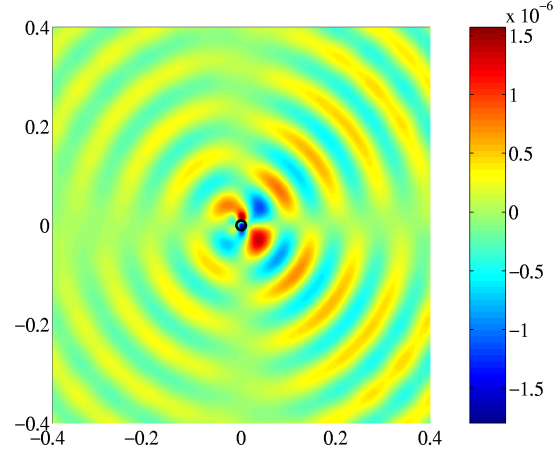


FIG. IV.34 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 10L = 0.1$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

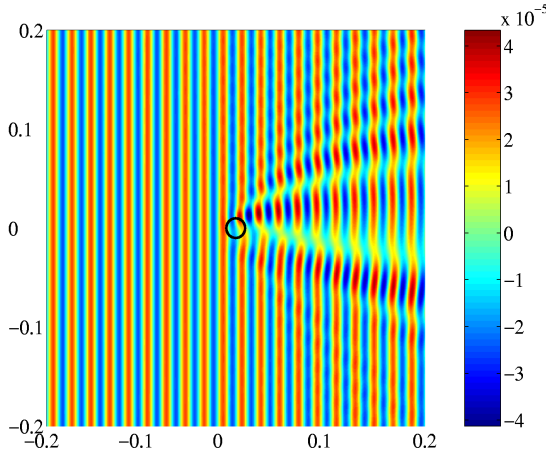


FIG. IV.35 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 2L = 0.02$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

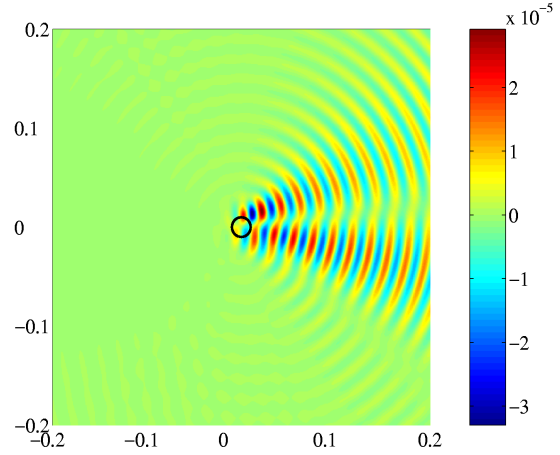


FIG. IV.36 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 2L = 0.02$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.



FIG. IV.37 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = L = 0.01$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

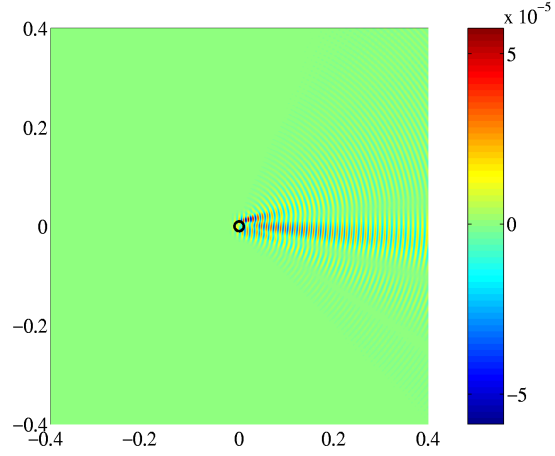


FIG. IV.38 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = L = 0.01$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

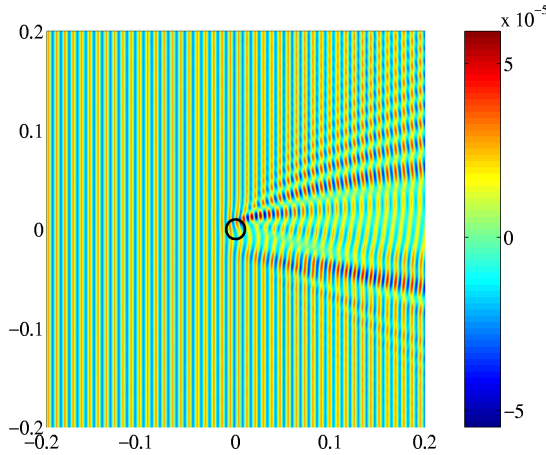


FIG. IV.39 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 0.875 L = 8.75 \cdot 10^{-3}$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

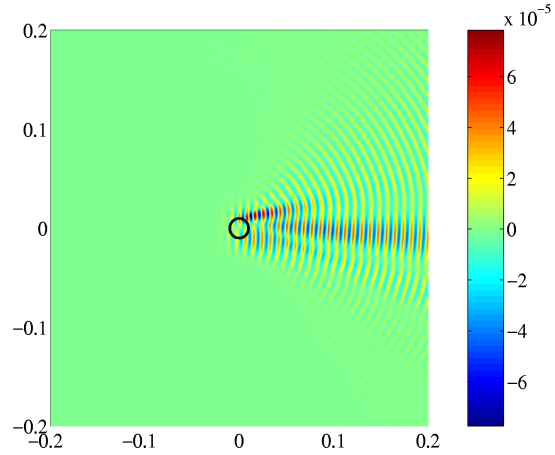


FIG. IV.40 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 0.875 L = 8.75 \cdot 10^{-3}$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

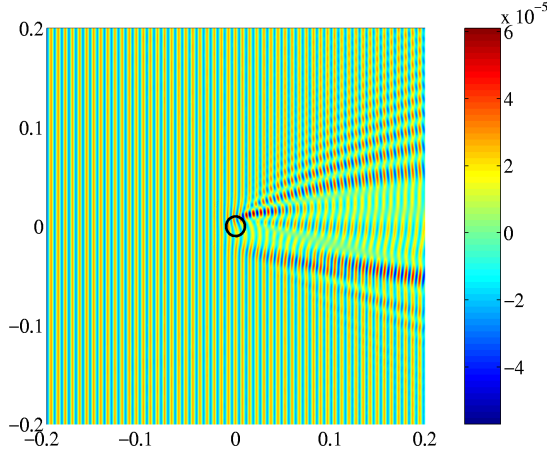


FIG. IV.41 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 0.75 L = 7.5 \cdot 10^{-3} m$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

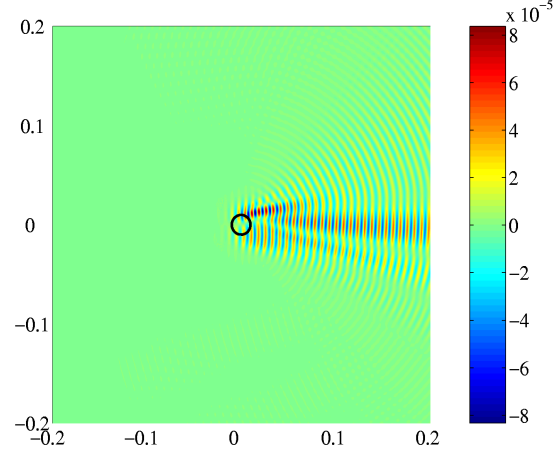


FIG. IV.42 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 0.75 L = 7.5 \cdot 10^{-3} m$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

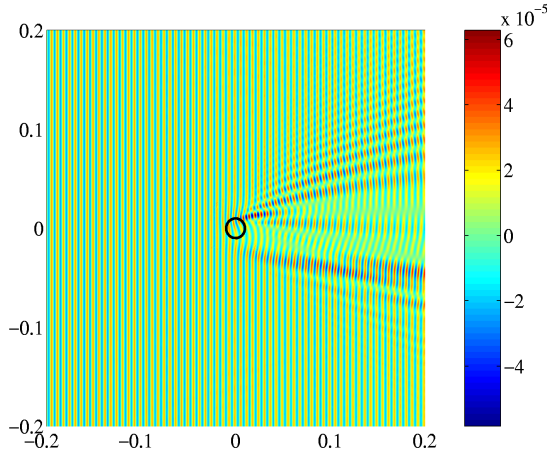


FIG. IV.43 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 0.625 L = 6.25 \cdot 10^{-3} m$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

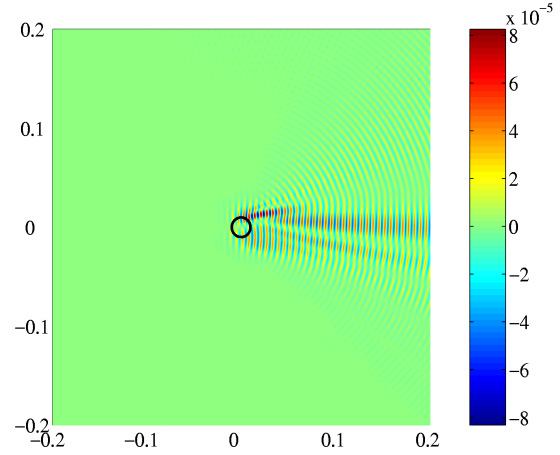


FIG. IV.44 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} par un vortex de Taylor (sa position est représentée par le cercle de rayon L) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$, pour $\lambda = 0.625 L = 6.25 \cdot 10^{-3} m$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

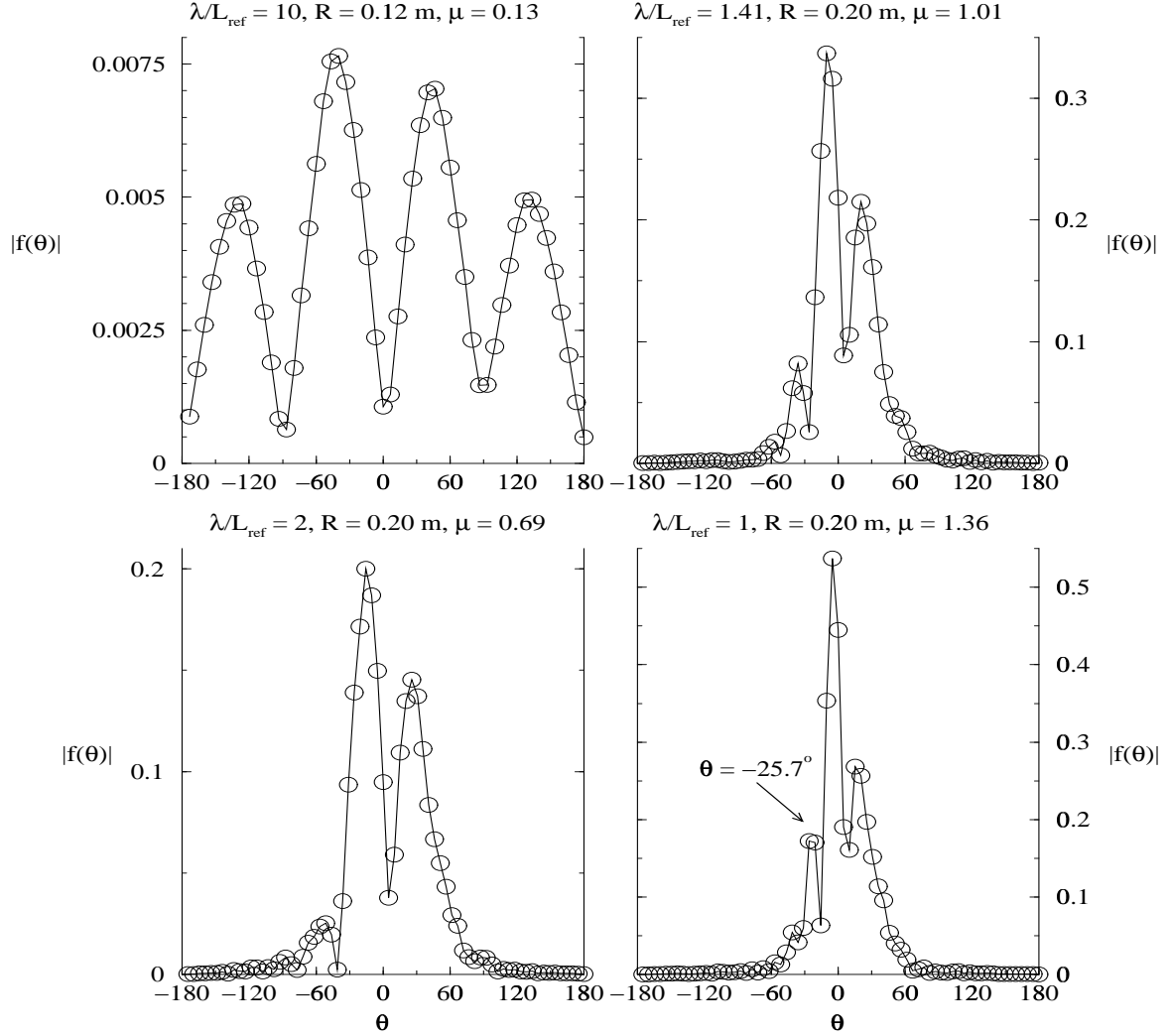


FIG. IV.45 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (exprimé en degrés) dans le cas de la diffusion d'une onde plane par un vortex polynomial à circulation nulle, de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.15$. Les (O) représentent la position des microphones d'acquisition numérique.

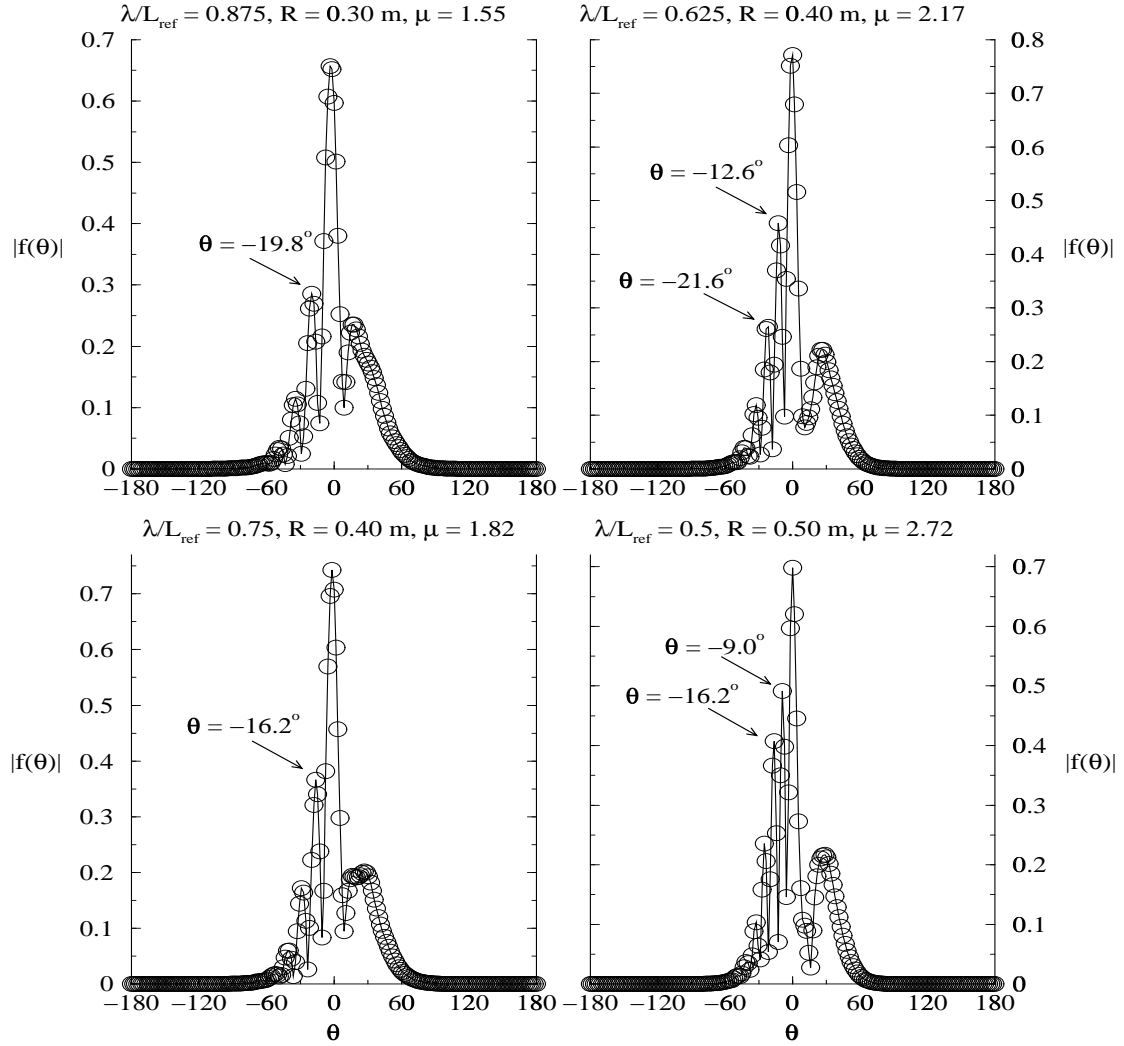


FIG. IV.46 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (exprimé en degrés) dans le cas de la diffusion d'une onde plane par un vortex polynomial à circulation nulle, de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.15$. Les (O) représentent la position des microphones d'acquisition par la méthode des ondes partielles.

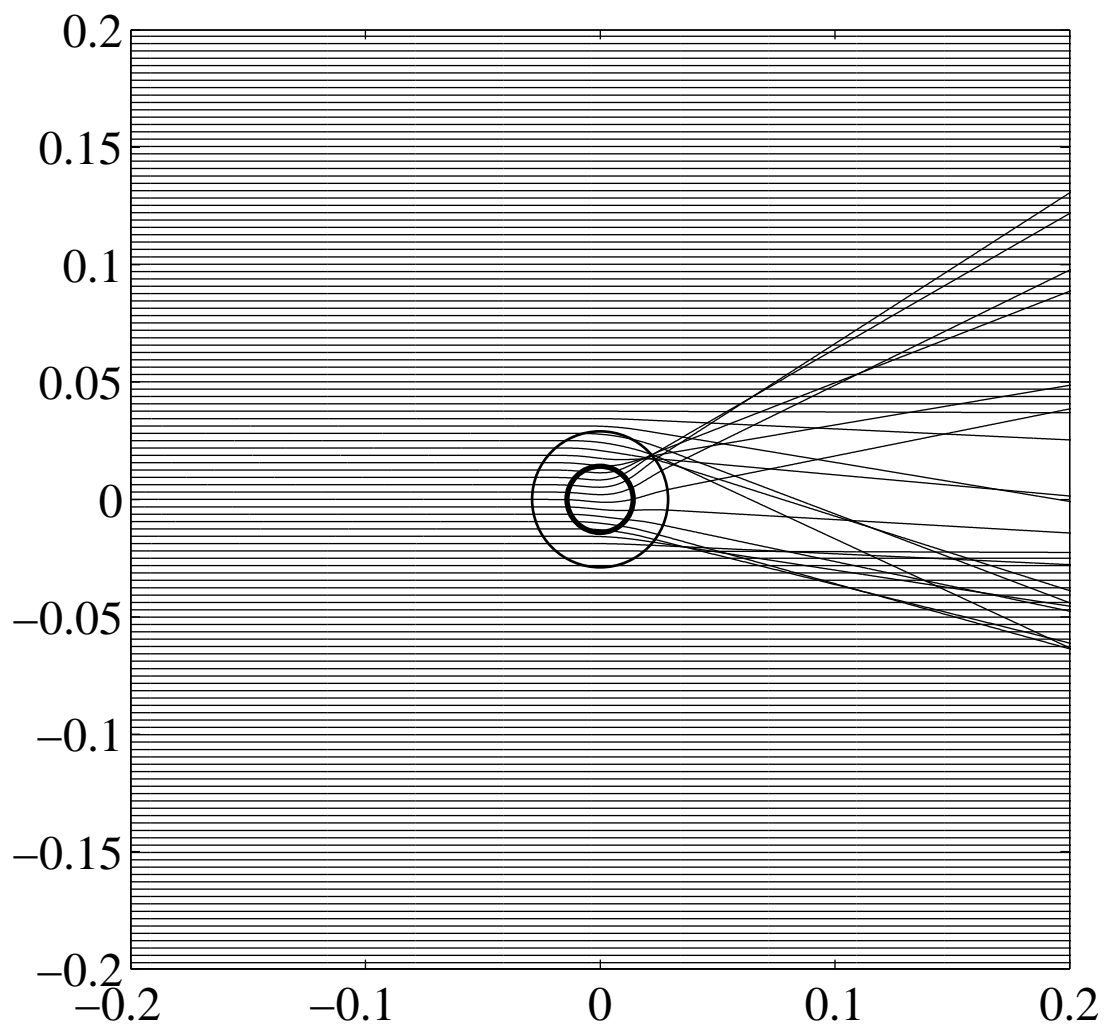


FIG. IV.47 – Réfraction des rayons acoustiques par un tourbillon polynomial à circulation nulle ($\mathcal{M} \simeq 0.15$) avec $\Omega_0 < 0$. Les deux cercles représentent les tailles caractéristiques $L_1 = L_{Ta}$ et L_m . Les unités sur chaque axe sont en mètres.

peut évaluer par :

$$\theta_{geom}^{Ta} \simeq \arctan\left(\frac{-0.05}{0.2}\right) = -14^\circ \quad (1.31)$$

et qui est en bon accord avec l'analyse des résultats de la simulation numérique.

Les figures IV.33-IV.44 qui présentent, pour la masse volumique, le champ sonore ρ_s et le champ diffusé ρ_{diff} , confirment cette analyse. Elles mettent en évidence la diminution significative du secteur angulaire de diffusion autour de l'image géométrique lorsque la longueur d'onde diminue, ainsi que l'importance de la diffusion pour des longueurs d'onde $\lambda \simeq L_{ref}$: l'onde sonore ρ_s est quasiment plane pour $\lambda/L = 10$ tandis que l'amplitude de l'onde diffusée devient significative pour $\lambda/L \simeq 1$ (sa présence se manifeste en observant le champ de l'onde sonore totale ρ_s).

Des résultats analogues sont obtenus dans le cas du tourbillon polynomial, comme nous pouvons le constater sur les figures IV.45 (résultats de la simulation numérique) et IV.46 (résultats de la méthode des ondes partielles) présentant l'évolution de l'amplitude de diffusion avec l'angle de diffusion θ , dans l'approximation du champ lointain (1.20). La figure IV.47 présentant le tracé des rayons acoustiques réfractés par l'écoulement confirme l'analyse précédente (1.31), avec une forte concentration de rayons pour

$$\theta_{geom}^{Poly} \simeq \arctan\left(\frac{-0.06}{0.2}\right) = -16.7^\circ \quad (1.32)$$

en bon accord avec l'analyse des courbes de la figure IV.46.

1.7.3 Section efficace de diffusion

Un examen approfondi des figures IV.30-IV.31 et des figures IV.45-IV.46 montre que la valeur du maximum de diffusion varie sur 2 ordres de grandeur pour $0.5 \leq \lambda/L_{ref} \leq 10$ et que la structure de l'amplitude de diffusion est affectée par la longueur d'onde. Ainsi, il nous est paru judicieux de nous intéresser également à la section efficace de diffusion σ_{diff} , dont nous avons rappelé l'expression à l'aide de la relation (1.28). Les figures IV.48 et IV.49 présentent l'évolution de σ_{diff} en fonction de la longueur d'onde, pour le tourbillon de Taylor et pour le vortex polynomial à circulation nulle, en échelles log-lin.

Vortex de Taylor

Dans le cas du tourbillon de Taylor, nous avons comparé nos résultats numériques avec ceux déduits de l'expression analytique (1.25), obtenue dans le cadre de la première approximation de Born. Comme cela a déjà été évoqué au paragraphe 1.4, l'accord est bon dans entre nos résultats et l'approximation de Born pour $\lambda/L_{ref} \geq 2$ (ce qui correspond à $\mu \leq 0.71$)

Remarque : La condition de validité de l'approximation de Born est ici moins drastique que celle que nous avons déduite au paragraphe 1.4.3 en analysant les amplitudes de diffusion car

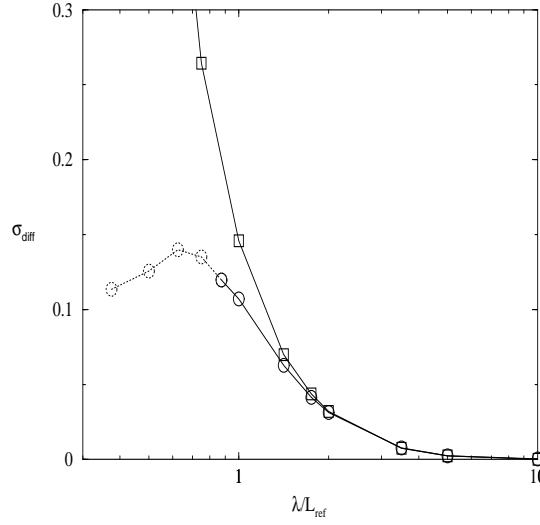


FIG. IV.48 – Section efficace de diffusion σ_{diff} en fonction de λ/L_{ref} (échelles log-lin) dans le cas de la diffusion d'une onde plane incidente par un vortex de Taylor de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.16$. O : résultat numérique (les résultats sous la forme (...) ne sont pas évalués dans la limite de champ lointain évoqué au paragraphe 1.3) et (\square) : première approximation de Born.

σ_{diff} est une grandeur intégrale et a tendance à gommer les faibles écarts telle que la disymétrie de l'amplitude de diffusion.

Pour des longueurs d'onde plus petites, la section efficace totale de diffusion s'écarte singulièrement de la prédiction analytique et atteint une valeur maximale pour $\lambda = 0.625 L_{ref} \simeq L_{Ta}/2$. Cette analyse reste cependant soumise aux contraintes de validité du champ lointain, comme nous l'avons souligné dans l'introduction.

Vortex polynomial à circulation nulle

L'utilisation conjointe de la simulation numérique et de la méthode des ondes partielles conduit, pour une même valeur du rapport λ/L_{ref} où les deux procédures sont valables (suffisamment de points par longueur d'onde et validité du champ lointain pour la simulation numérique, $\beta = 2\pi L_{Ta}/\lambda \geq 10$ pour les ondes partielles d'après les comparaisons effectuées au paragraphe 3.3 du chapitre II), à des résultats légèrement différents :

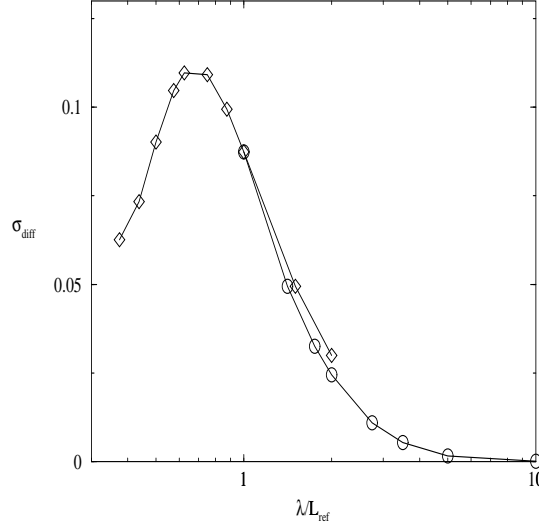


FIG. IV.49 – Section efficace de diffusion σ_{diff} en fonction de λ/L_{ref} (échelles log-lin) dans le cas de la diffusion d'une onde plane incidente par un vortex polynomiale à circulation nulle, de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 0.15$. O : résultat numérique et (\diamond) : méthode des ondes partielles.

	$\frac{\lambda}{L_{ref}} = 1$ ($\beta \simeq 18.2$)	$\frac{\lambda}{L_{ref}} = \sqrt{2}$ ($\beta \simeq 12.9$)
Numérique : $\sigma_{diff}^{num} \simeq$	$8.74 \cdot 10^{-2}$	$4.95 \cdot 10^{-2}$
Ondes partielles : $\sigma_{diff}^{part} \simeq$	$9.85 \cdot 10^{-2}$	$5.57 \cdot 10^{-2}$

Cet écart, de l'ordre de 10%, s'explique par une faible variation des paramètres de l'écoulement moyen dans la simulation numérique, due à l'adaptation de la condition initiale au schéma numérique (voir le paragraphe 4.2 du chapitre III) et à une faible dissipation numérique du code (paragraphe 4.3 du chapitre III). Ainsi, nous avons « normalisé » la section efficace totale de diffusion obtenue à partir de la méthode des ondes partielles par rapport à celle obtenue par la simulation numérique afin que $\sigma_{diff}^{num}(\lambda = L_{ref}) = \sigma_{diff}^{part}(\lambda = L_{ref})$. Ainsi, in fine,

$$\sigma_{diff}^{part}(\lambda/L_{ref}) \longrightarrow \frac{\sigma_{diff}^{part}(\lambda/L_{ref})}{\sigma_{diff}^{num}(\lambda = L_{ref})}. \quad (1.33)$$

L'étude de l'évolution de σ_{diff} dans le cas du tourbillon polynomial à circulation nulle permet de confirmer le comportement précédent, avec un maximum de la section efficace totale de diffusion pour $\lambda = 0.625 L_{ref} \simeq L_{Ta}/2$. Cela est tout à fait cohérent avec la structure très proche des deux écoulements (voir la figure IV.29) qui induit des comportements en matière de diffusion très similaires.

1.7.4 Théorème optique

L'amplitude de diffusion est non nulle dans la direction incidente $\theta = 0$, ce qui est conforme au théorème optique (voir le paragraphe 3.3 du chapitre I). Le théorème optique permet de remonter à la section efficace totale puis à la section efficace d'absorption (relation (3.6) du chapitre I), puisque l'on connaît la section efficace de diffusion σ_{diff} . Nous n'avons pas effectué cette opération car les résultats obtenus ne sont pas assez précis, notamment dans la détermination du déphasage entre l'onde diffusée et l'onde incidente.

1.7.5 Conclusion

L'étude des effets de la longueur d'onde sur les phénomènes de diffusion du son par un tourbillon isolé nous a permis d'affiner le comportement de l'amplitude de diffusion pour les petites longueurs d'onde, où l'approximation de Born n'est plus valide, au moyen de deux écoulements à circulation nulle de structures très voisines.

Nous avons ainsi constaté que la diffusion du son par un tourbillon se comporte de manière analogue à la diffraction en optique : lorsque la longueur d'onde devient comparable à la taille de l'objet diffractant, on observe une figure de diffraction centrée autour de l'image géométrique. C'est ce que l'on retrouve ici en comparant l'allure de l'amplitude de diffusion pour de petits rapports λ/L_{ref} avec le tracé de rayons effectué dans le cadre de l'acoustique géométrique : à mesure que la longueur d'onde diminue, la figure de diffraction « se ressert » autour de l'image géométrique, cette dernière étant ici beaucoup moins bien définie spatialement qu'en optique.

Nous avons également étudié l'évolution de la section efficace totale de diffusion en fonction du rapport λ/L_{ref} . Nous avons constaté que la section efficace passe par un maximum pour $\lambda = 0.625 L_{ref} \simeq L_{Ta}/2$, L_{Ta} correspondant au rayon du cœur du tourbillon. Ainsi, on peut conclure que l'on a un phénomène de résonance lors de l'interaction entre une onde sonore et un tourbillon isolé de circulation nulle, la résonance ayant lieu pour $\lambda \simeq L/2$ (L est la taille caractéristique du tourbillon).

1.8 Effet de champ proche

Les figures IV.33-IV.44 présentées au paragraphe 1.7 nous permettent d'étudier les effets de champ proche lors de la diffusion du son par un écoulement, ici le tourbillon de Taylor décrit au paragraphe 1.2.1 avec $\mathcal{M} \simeq 0.16$ et $L_1 = 0.01 m = L_{ref}$ ($L_{Ta} = L_1 \sqrt{2}$). En effet, pour des longueurs d'onde $\lambda \leq L_{ref}$, le critère de champ lointain (1.20) est de

plus en plus difficile à respecter et on se trouve souvent, dans le cas des petites longueurs d'onde, en dehors du cadre de la diffusion en champ lointain que nous avons rappelé au paragraphe 1.4.2, même si la première approximation de Born est bien vérifiée (nombre de Mach petit par exemple).

On peut constater que même lorsque l'on se rapproche du tourbillon (repéré sur les figures par un cercle de rayon $L = 0.01 m$), une description qualitative du phénomène de diffusion reste correcte tant que l'on se situe à des distances supérieures à une dizaine de longueurs d'onde, dans les cas « critiques » où $\lambda \leq 0.01 m$. Cependant, d'un point de vue quantitatif, de faibles modifications dans l'allure du champ sonore diffusé sont visibles, avec notamment la présence de pics de diffusion secondaires qui s'estompent en champ lointain.

Si l'on se situe trop près du tourbillon, les résultats de la diffusion sont alors complètement différents des observations en champ lointain, avec un maximum de l'onde sonore diffusée dans une direction différente de celle du champ lointain (voir par exemple les figures IV.36 et IV.42 présentant l'onde sonore diffusée ρ_{diff} ainsi que les figures IV.11 et IV.12 présentant l'allure de l'amplitude $g(R, \theta)$ définie par la relation (1.17)).

Cet effet de champ proche est analogue à la transition entre la diffraction de Fresnel en champ proche et la diffraction de Fraunhofer en champ lointain (voir par exemple le cas de la diffraction par une fente, [Hec98] figure 10.5 page 438)

Ainsi, on peut conclure que, d'un point de vue quantitatif, on s'approche assez bien du comportement diffusif en champ lointain dès que l'on est à quelques longueurs d'onde à l'extérieur de l'écoulement (cette analyse est confirmée dans le cas de la diffusion par un dipôle de vorticité, que nous allons étudier au chapitre 2. D'un point de vue qualitatif, le critère d'observation de la diffusion dans la région du champ lointain est beaucoup moins fort que la condition (1.20) que nous avons déduite au paragraphe 1.3 de l'analyse de l'amplitude $g(R, \theta)$, en nous basant sur le critère de diffraction de Fraunhofer (1.16).

Cela explique le succès de l'emploi de la diffusion du son dans la détection des filaments de vorticité [DPF98] et dans l'étude plus générale d'écoulements complexes [PLFC93, LP98, HP99] pour lesquels l'approximation de Born est de facto vérifiée.

1.9 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre l'interaction entre une onde sonore et un tourbillon isolé de circulation nulle. Nous avons modélisé ce tourbillon par un vortex de Taylor ou par une approximation polynomiale de la vorticité.

Nous avons ainsi pu mettre en évidence le domaine de validité de l'approximation de champ lointain communément utilisée dans l'approche théorique de l'étude de la diffusion du son.

  l'aide de cet écoulement, nous avons été en mesure d'analyser les écarts à l'approximation de Born et de dégager un paramètre qui gouverne la validité de cette hypothèse : $\mu = \beta \mathcal{M}$. Ainsi, l'approximation de Born est valide si $\mu \ll 1$.

Nous avons ensuite étudié séparément l'influence de nombre de Mach \mathcal{M} et de la longueur d'onde λ sur la diffusion du son. Cela nous a permis, à l'aide de la simulation numérique, de la méthode des ondes partielles et du tracé de rayons, d'analyser le comportement de l'amplitude de diffusion lorsque la longueur d'onde sonore diminue et de mettre en évidence une longueur d'onde de résonance, correspondant à un maximum de la section efficace totale de diffusion, lors du processus de diffusion du son par un tourbillon.

Enfin, grâce à aux méthodes que nous avons développées précédemment, nous avons étudié les modifications apportées à l'allure de l'amplitude de diffusion lorsque le critère de champ lointain n'est plus respecté.

2. Dipôle de vortacité

2.1 Introduction

Nous considérons dans ce chapitre une paire de tourbillons d'Oseen de taille caractéristique L , contra-rotatifs et de circulation opposée. Cet écoulement dipolaire à circulation nulle a déjà été largement étudié à cause de son importance expérimentale dans de nombreux écoulements [Kov49, CB86, HP99]. Une étude de la diffusion du son par une allée de Von Kármán a également été menée, expérimentalement [GEF82, BCP91, Pin92, ESC00] ainsi qu'analytiquement [GEF82, TI82]. Contrairement à ce que nous avons fait dans le chapitre précédent, nous nous intéressons ici à un écoulement dont nous avons fixé le nombre de Mach \mathcal{M} , afin de pouvoir analyser nos résultats en lien avec les données expérimentales [HP99, LW98]. Nous allons plus spécifiquement nous intéresser dans ce chapitre à l'effet de la paire de tourbillons sur la diffusion du son, ce qui nous permettra d'identifier, grâce aux champs bidimensionnels fournis par la simulation numérique, deux étapes fondamentales lors de la diffusion du son par un écoulement à circulation nulle.

L'écoulement étudié étant toujours de nombre de Mach faible, de telle sorte que la première approximation de Born est toujours vérifiée, nous ne nous sommes pas intéressés à l'influence de \mathcal{M} sur la diffusion : comme nous l'avons déjà vu au paragraphe 1.6, l'amplitude de diffusion est proportionnelle à \mathcal{M} dans le cadre de la première approximation de Born. Ainsi, après avoir détaillé l'écoulement dipolaire et le choix des paramètres d'étude, nous nous intéresserons à la validité des approximations nécessaires à l'étude de la diffusion du son (approximation de champ lointain, approximation de Born,...). Nous étudierons ensuite l'influence de la longueur d'onde sonore et de l'orientation du moment dipolaire de l'écoulement sur la diffusion du son.

Enfin, dans une dernière partie, nous étudierons plus en détail, à l'aide des champs sonores calculés grâce à la simulation numérique, une configuration particulière de l'écoulement où le moment dipolaire est parallèle à la direction de propagation de l'onde incidente. Cette configuration nous permettra de mieux comprendre les mécanismes physiques en jeu lors du processus de diffusion du son.

2.2 Structure de l'écoulement

La configuration générale de l'écoulement dipolaire que nous avons étudié est présentée sur la figure IV.50.(a).

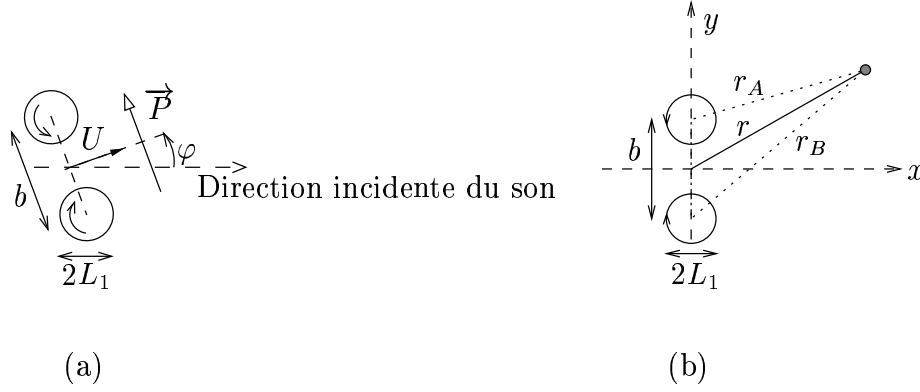


FIG. IV.50 – *Dipôle de vorticité*

φ est l'angle entre le moment dipolaire \vec{P} et la direction incidente du son, L_1 est le rayon caractéristique de chaque vortex, b est l'écart entre les deux tourbillons et U est la vitesse caractéristique de déplacement de la paire.

Chaque tourbillon est un tourbillon de Oseen. Les champs de vitesse et de vorticité d'un tourbillon d'Oseen isolé sont (la structure de ce tourbillon est détaillée au paragraphe 2.2 du chapitre V :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp \left[-\alpha \frac{r^2}{L_1^2} \right] \right) \hat{\theta} \quad (2.1.a)$$

$$\vec{\Omega}(\vec{r}) = \Omega_0 \exp \left[-\alpha \frac{r^2}{L_1^2} \right] \hat{z}, \quad (2.1.b)$$

$\alpha \simeq 1.256431$ de manière à ce que la vitesse du tourbillon soit maximale pour $r = L_1$. La circulation de ce tourbillon est liée à la vorticité maximale Ω_0 par

$$\Gamma = \frac{\Omega_0 \pi L_1^2}{\alpha}$$

et son nombre de Mach s'exprime selon

$$\mathcal{M} = \frac{\Omega_0 L_1}{(1 + 2\alpha) c}. \quad (2.2)$$

Pour des nombres de Mach faibles, on peut négliger dans l'équation d'Euler le terme quadratique $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ et considérer ainsi que la vorticité totale de la paire est la somme de la vorticité de chacun des tourbillons :

$$\vec{\Omega}(r) \simeq \Omega_0 \left[\exp \left(-(r_A/L_1)^2 \right) - \exp \left(-(r_B/L_1)^2 \right) \right] \hat{z}. \quad (2.3)$$

avec les notations de la figure IV.50.(b). De même, la vitesse de l'écoulement est :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{r_A} \left(1 - \exp \left[-\alpha \frac{r_A^2}{L_1^2} \right] \right) \hat{\theta}_A - \frac{1}{r_B} \left(1 - \exp \left[-\alpha \frac{r_B^2}{L_1^2} \right] \right) \hat{\theta}_B \right], \quad (2.4)$$

le nombre de Mach de l'écoulement étant voisin du nombre de Mach d'un seul tourbillon

$$\mathcal{M} \simeq \Omega_0 L_1 / (3.5 c) \quad (2.5)$$

d'après la relation (2.2)

Remarque : le champ de pression de l'écoulement dipolaire n'est pas la simple somme des champs de pression de chaque tourbillon, car on n'aurait pas alors une pression de référence correcte à l'infini. De plus, la pression est une quantité physique quadratique en vitesse pour un écoulement non dissipatif. Ainsi, il faut faire le calcul complet de la pression à partir de l'équation d'Euler et du champ de vitesse (2.4).

On peut alors en déduire les champs de pression et de masse volumique en considérant l'écoulement compressible, de manière analogue à ce que nous avons fait au paragraphe 1 du chapitre précédent. Les figures IV.51-IV.53 présentent l'allure de la vorticité, de la vitesse et de la masse volumique de cet écoulement (obtenue à l'aide de la simulation numérique) pour un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$ avec $L_1 = 0.01 m$ et $b = 5L_1 = 0.05 m$. On peut noter que le champ de vitesse résultant \vec{v} comporte une composante non nulle selon y en $x = 0$, de l'ordre de 1% de la composante selon x .

2.3 Choix des paramètres de l'écoulement

Nous avons fixé la vorticité maximale de chaque tourbillon et sa taille caractéristique L_1 . Cela a pour effet de produire un écoulement de nombre de Mach \mathcal{M} qui est toujours du même ordre de grandeur, car \mathcal{M} dépend faiblement de b .

Afin d'effectuer des comparaisons avec les expériences de R. Hernandez ([HP99] Chapitre 4 paragraphe 4.4), nous avons choisi un écoulement caractérisé par un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$, ce qui conduit, en prenant $L = 0.01 m$, à choisir $\Omega_0 = 125 s^{-1}$.

Nous avons par contre fait varier l'angle φ ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$) et la distance b entre les deux tourbillons ($0.025 m \leq b \leq 0.1 m$), une configuration proche de la configuration expérimentale de R. Hernandez étant $b = 0.05 m$ et $\varphi = 10^\circ$.

2.4 Validité des approximations

Une fois les paramètres de l'écoulement choisis, il est important de cerner le cadre dans lequel nous allons étudier la diffusion du son par le dipôle de vorticité. Nous avons déjà vu que deux approximations importantes dans le cadre de l'étude de la diffusion du son, en lien avec les travaux existants : l'approximation de champ lointain, qui permet de définir sans ambiguïté l'amplitude de diffusion $f(\theta)$, et la première approximation de

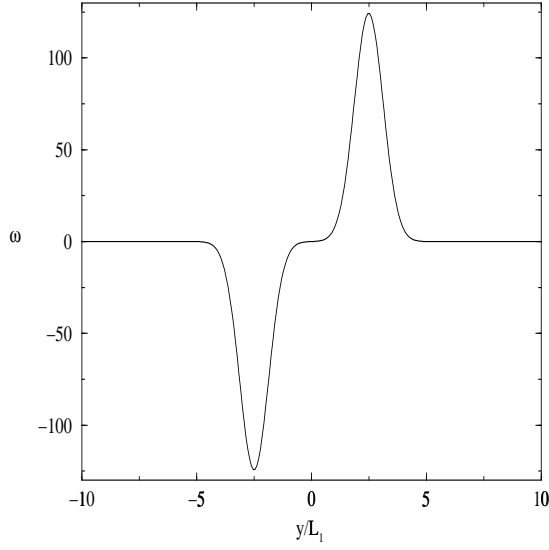


FIG. IV.51 – Vorticité Ω (en s^{-1}) en fonction de y/L_1 pour le dipôle de vorticité (2.3) avec $\mathcal{M} \simeq 0.001$ et $b = 5L_1$.

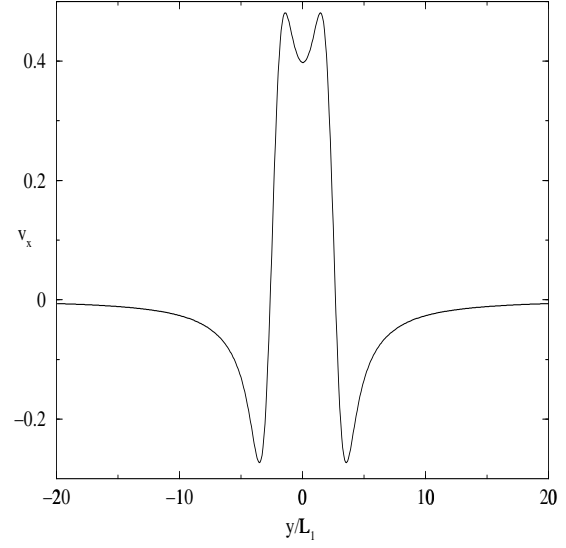


FIG. IV.52 – Vitesse selon x v_x (en $m.s^{-1}$) en fonction de y/L_1 pour le dipôle de vorticité (2.4) avec $\mathcal{M} \simeq 0.001$, $b = 5L_1$ et $\varphi = 0^\circ$.

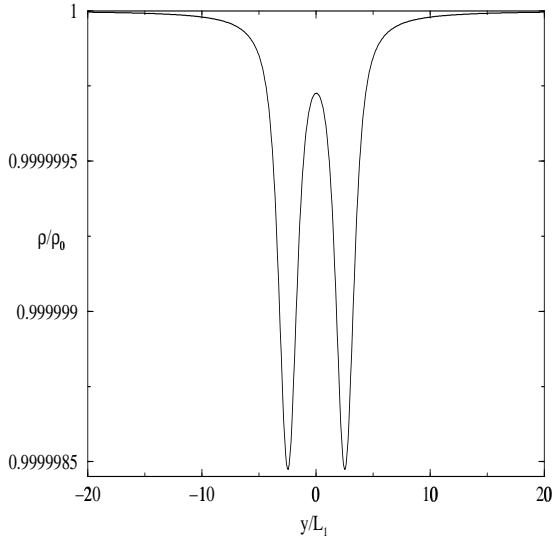


FIG. IV.53 – Masse volumique ρ/ρ_0 en fonction de r/L_1 pour le dipôle de vorticité (2.4) avec $\mathcal{M} \simeq 0.001$, $b = 5L_1$ et $\varphi = 0^\circ$.

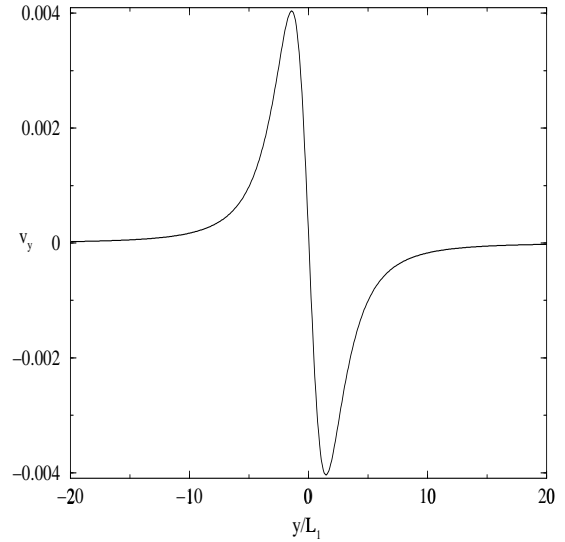


FIG. IV.54 – Vitesse selon y v_y (en $m.s^{-1}$) en fonction de y/L_1 pour le dipôle de vorticité (2.4) avec $\mathcal{M} \simeq 0.001$, $b = 5L_1$ et $\varphi = 0^\circ$.

Born permettant des comparaisons avec les travaux analytiques. Dans le cas d'un dipôle de vorticité, il est de plus nécessaire de s'assurer d'une autre hypothèse : l'écoulement moyen est supposé stationnaire lors de la diffusion du son.

Dans ce paragraphe, nous allons discuter ces trois approximations afin déterminer leur validité dans les différentes configurations d'étude de la diffusion du son par le dipôle de vorticité.

2.4.1 Stationnarité de l'écoulement moyen

Pour une configuration fixée (b et φ donnés), une des hypothèses importantes du cadre de notre étude est de supposer l'écoulement comme stationnaire lors de l'interaction son-écoulement. Dans le cas du dipôle de vorticité, ce dernier se déplace à une vitesse moyenne $U \simeq c\mathcal{M}$, ce qui correspond, dans notre cas, à $U \simeq 0.38 \text{ m.s}^{-1}$. La figure IV.55 présente l'évolution numérique des composantes v_x et v_y de la vitesse de l'écoulement au centre du domaine, qui correspond à la vitesse moyenne d'advection du dipôle, pour la configuration $\mathcal{M} = 10^{-3}$, $b = 0.05 \text{ m}$ et φ . La vitesse selon \hat{x} est bien de l'ordre de $c\mathcal{M}$, et on peut constater la présence d'une faible vitesse d'advection selon \hat{y} , mais qui reste négligeable devant l'écoulement moyen.

Numériquement, nous avons choisi avec les configurations d'étude A1 ou A2 et les durées d'acquisitions correspondantes (voir le paragraphe 1.2 du chapitre III). Ainsi, dans le cas le plus « défavorable » (configuration A1), le temps d'acquisition est $T_a = 4000 \times 10^{-6} \text{ s} = 4.10^{-3} \text{ s}$. Sur ce temps d'observation de la diffusion du son, le dipôle se déplace de $\Delta = U \times T_a = 1.52.10^{-3} \text{ m}$. La taille typique d'observation est $R \simeq 0.4 \text{ m}$. Ainsi, considérer la dipôle de vorticité comme stationnaire conduit à une erreur sur sa position de l'ordre de 0.04% (qui se retrouve sur la position des microphones d'acquisition du son), qui reste très faible devant les autres sources d'imprécisions de la simulation numérique (dispersion et dissipation numérique entre autres).

2.4.2 Approximation du champ lointain

La taille caractéristique de l'écoulement dipolaire considéré est $L \simeq b$. Ainsi, le critère de champ lointain prend la forme

$$R_{Fr} = \frac{2\pi b^2}{\lambda}. \quad (2.6)$$

Comme nous l'avons déjà signalé au paragraphe 1.3, le critère pratique pour considérer que la diffusion du son est étudiée dans le domaine de champ lointain est $R \geq 0.5 R_{Fr}$ (relation (1.20)).

  titre d'exemple, considérons les choix de paramètres

- $b = 0.1 \text{ m}$ et $\lambda = 0.01 \text{ m}$: dans ce cas,

$$R_{Fr} \simeq 6.3 \text{ m} ;$$

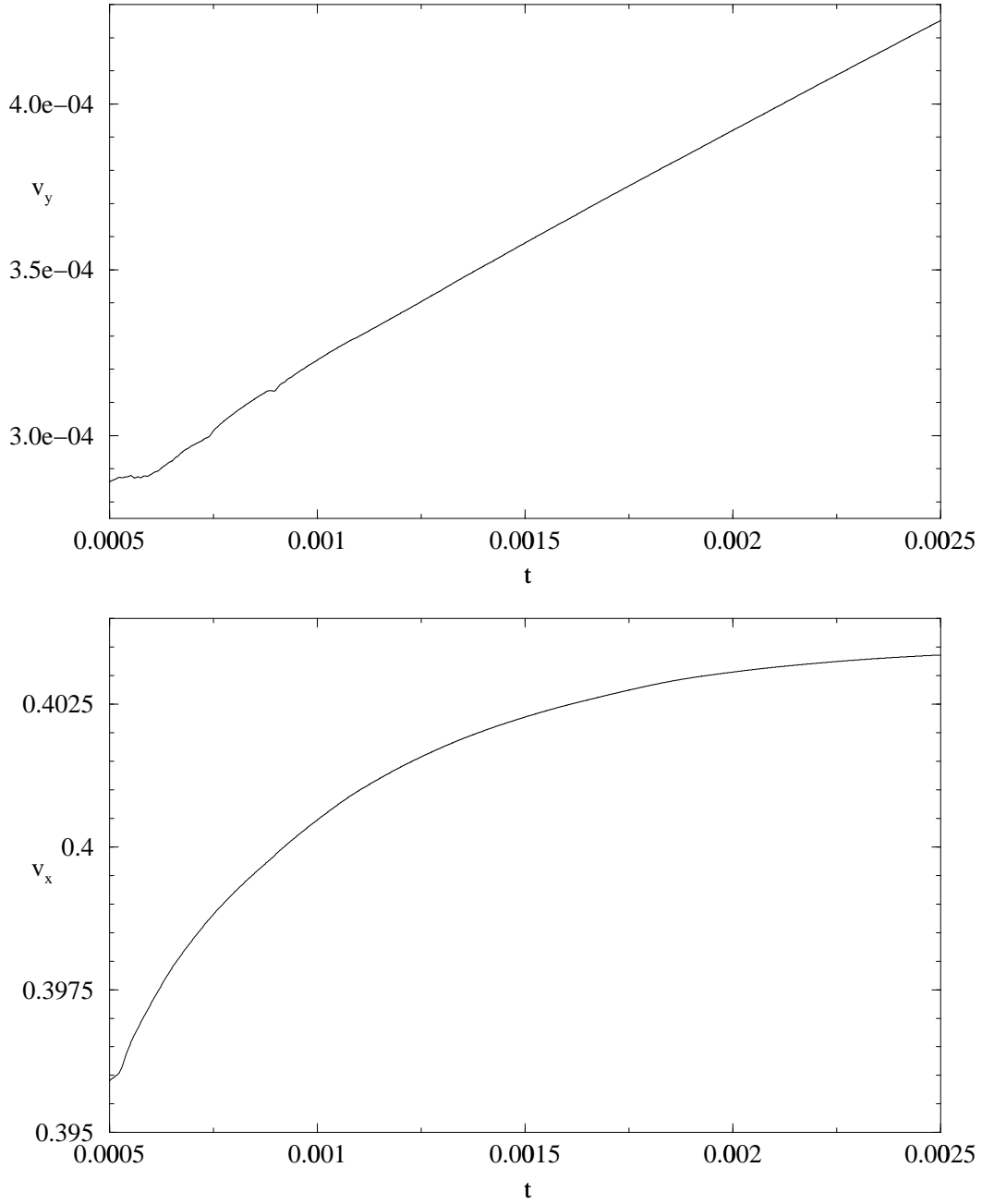


FIG. IV.55 – Évolution temporelle des composantes v_x et v_y (en m/s) de la vitesse de l'écoulement moyen au centre du domaine de simulation (cette vitesse correspond à la vitesse d'advection du dipôle) pour un tourbillon de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$ avec $\varphi = 0$ et $b = 0.05$.

- $b = 0.025 \text{ m}$ et $\lambda = 0.01 \text{ m}$: dans ce cas,

$$R_{Fr} \simeq 0.39 \text{ m}.$$

Il nous sera donc assez difficile, pour une large gamme de longueur d'onde, de concilier l'exigence du champ lointain avec les configurations A1 ou A2 à notre disposition. Cependant, nous allons voir dans la suite que l'évaluation que nous venons de faire surestime largement la zone du champ lointain car nous avons surévalué la taille caractéristique de l'objet diffractant.

2.4.3 Première approximation de Born

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4 du chapitre précédent, l'approximation de Born est valide si le paramètre $\mu = \beta \mathcal{M}$ vérifie $\mu \ll 1$. La taille caractéristique de l'écoulement considéré est $L \simeq b/2$ et nous avons généralement choisi un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$. D'où

$$\mu \simeq 3.14 \cdot 10^{-3} \frac{b}{\lambda}. \quad (2.7)$$

Ainsi, même dans le cas d'un écoulement de grande taille ($b = 0.1 \text{ m}$) et pour une longueur d'onde sonore $\lambda = 0.01 \text{ m}$, $\mu = 0.031$. La première approximation de Born est donc bien vérifiée pour cet écoulement, dans la gamme de longueur d'onde que nous avons choisie. Nous pourrions donc comparer nos résultats aux expressions analytiques de Fabrikant [Fab83], valides dans le cadre de la première approximation de Born. Pour un dipôle de vorticité (2.3) paramétré par Ω_0 , L_1 , b et φ , l'amplitude de diffusion s'exprime selon (relation 3.51 du paragraphe 3 chapitre I) :

$$f_D(\theta) = 2 \sin \left[\frac{\pi b}{\lambda} (\sin(\theta - \varphi) + \sin(\varphi)) \right] \times f_O(\theta) \quad (2.8)$$

où $f_O(\theta)$ est l'amplitude de diffusion d'un vortex d'Oseen isolé (relation 3.50 du paragraphe 3 du chapitre I) :

$$f_O(\theta) = \frac{\pi L_1^2 \Omega_0}{2 c \alpha} \sqrt{\frac{i}{\lambda}} \cos(\theta) \cotan(\theta/2) \exp \left[-\frac{4\pi^2}{\alpha} \left(\frac{L_1}{\lambda} \right)^2 \sin^2(\theta/2) \right]. \quad (2.9)$$

2.5 Effet de la longueur d'onde

2.5.1 Introduction

Nous avons tout d'abord étudié l'effet de la longueur d'onde du son incident sur la diffusion. Nous avons choisit pour cela $b = 0.05 \text{ m}$, ce qui correspond à un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$, et différents angles d'inclinaison φ du dipôle et effectué des simulations numériques à l'aide de la configuration A2.

Le nombre de Mach de l'écoulement étant petit, la diffusion est faible (amplitude de diffusion inférieure à 1%). Puisque la diffusion est moins efficace aux grandes longueurs d'onde, l'amplitude de diffusion que nous calculons numériquement est ainsi entâchée d'erreurs numériques, essentiellement dues aux réflexions parasites sur les frontières du domaine de calcul. Cela implique une certaine imprécision sur les résultats présentés, imprécision directement liée à la simulation numérique utilisée et qui se manifeste nettement pour de très faibles nombres de Mach et de grandes longueurs d'onde.

2.5.2 Amplitude de diffusion

La figure IV.56 présente l'évolution de l'amplitude de diffusion du dipôle de vorticité avec la longueur d'onde, pour $\varphi = 0$, $\varphi = 45^\circ$ et $\varphi = 90^\circ$. On constate un bon accord entre le résultat numérique et l'amplitude de diffusion (2.8) déduite de la première approximation de Born (aux imprécisions évoquées ci-dessus près), ce qui est cohérent avec l'ordre de grandeur du paramètre μ que nous avons estimé au paragraphe 2.4.3. Comme nous l'avons déjà remarqué dans le cas des tourbillons isolés à circulation nulle, la diffusion est d'autant plus efficace que la longueur d'onde est proche de la taille caractéristique L_1 d'un tourbillon.

La figure IV.57 présente l'allure de l'amplitude de diffusion déduite des simulations numériques, pour la configuration $\varphi = 0$. On peut constater que la distance b entre les deux tourbillons ne joue pas de rôle dans l'efficacité de la diffusion du son, même s'il s'agit de la taille globale de l'écoulement. En effet, chaque tourbillon, considéré de manière indépendante, diffuse de manière optimale le son incident pour $\lambda \simeq L_1$ (voir les paragraphes 1.7.3 du chapitre IV et 2.6.3 du chapitre V). De manière analogue aux interférences produites par des fentes d'Young en optique [BW99], l'amplitude de diffusion du dipôle n'est qu'une modulation de l'amplitude de diffusion d'un seul tourbillon (relation 2.8), liée aux interférences des ondes diffusées par chaque vortex.

2.5.3 Analogie optique

Afin de pouvoir comparer le résultat acoustique avec le résultat optique, nous avons effectué des enregistrements à $R = 0.2\text{ m}$ de l'écoulement, selon la direction \hat{y} perpendiculaire à la direction du son incident (voir la figure IV.50 (b)), tous les deux points du maillage avec la configuration A1. En introduisant $y = R \sin \theta$, l'amplitude de diffusion (2.8) du dipôle se met sous la forme :

$$f_D(y) = 2 \sin \left[\frac{\pi b y}{\lambda R} \right] \times f_O(y) \quad (2.10)$$

Ainsi, les ondes diffusées par chaque tourbillon interf rent de manière destructive lorsque l'amplitude de diffusion s'annule, i.e. pour

$$\frac{\pi b y}{\lambda R} = n\pi \iff y = n \frac{\lambda R}{b} \text{ avec } n \text{ entier.} \quad (2.11)$$

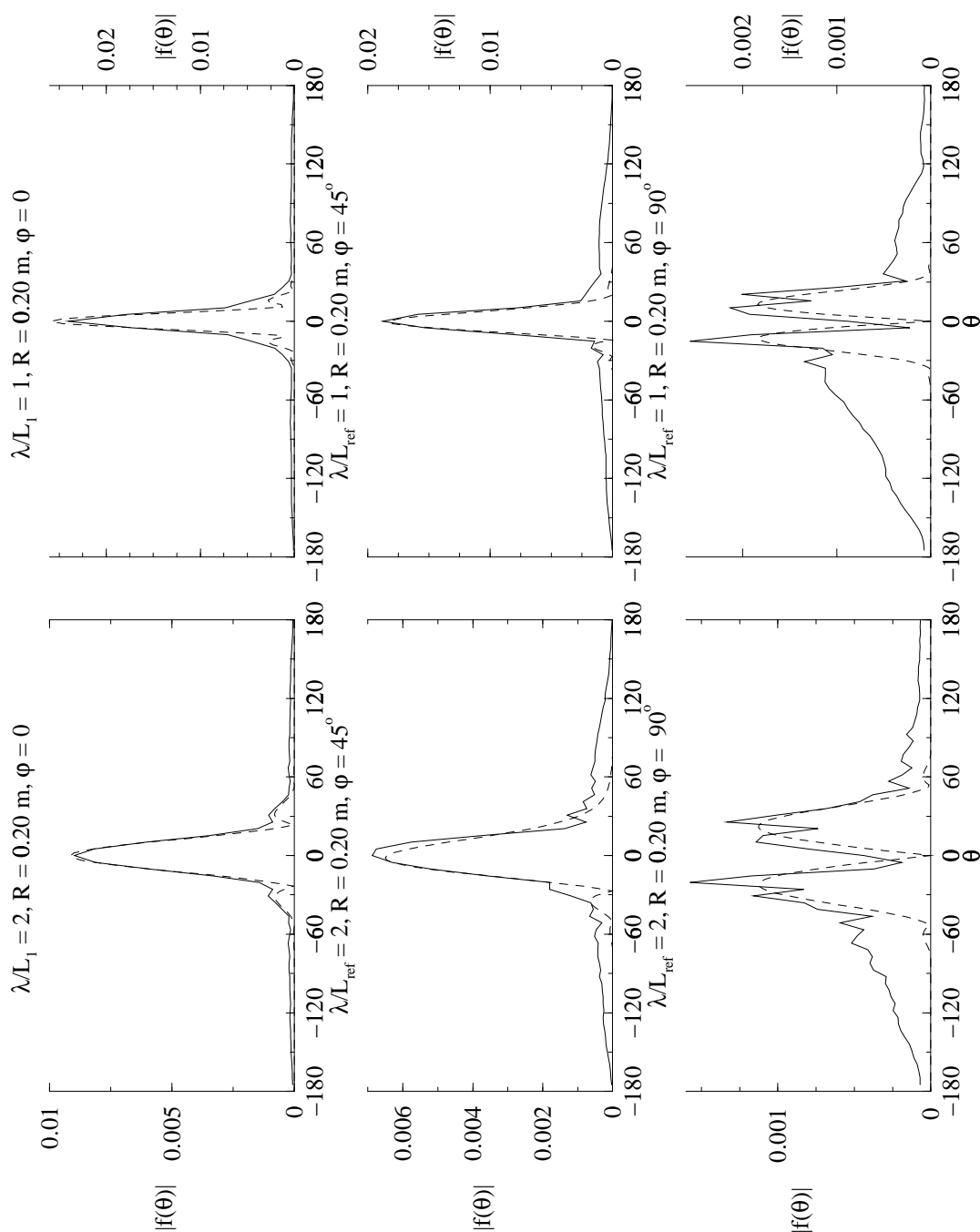


FIG. IV.56 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un dipôle de vorticité de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$ (θ est exprimé en degrés): (—) résultat numérique, (---) résultat analytique déduit de la relation (2.8) dans le cadre de la première approximation de Born.

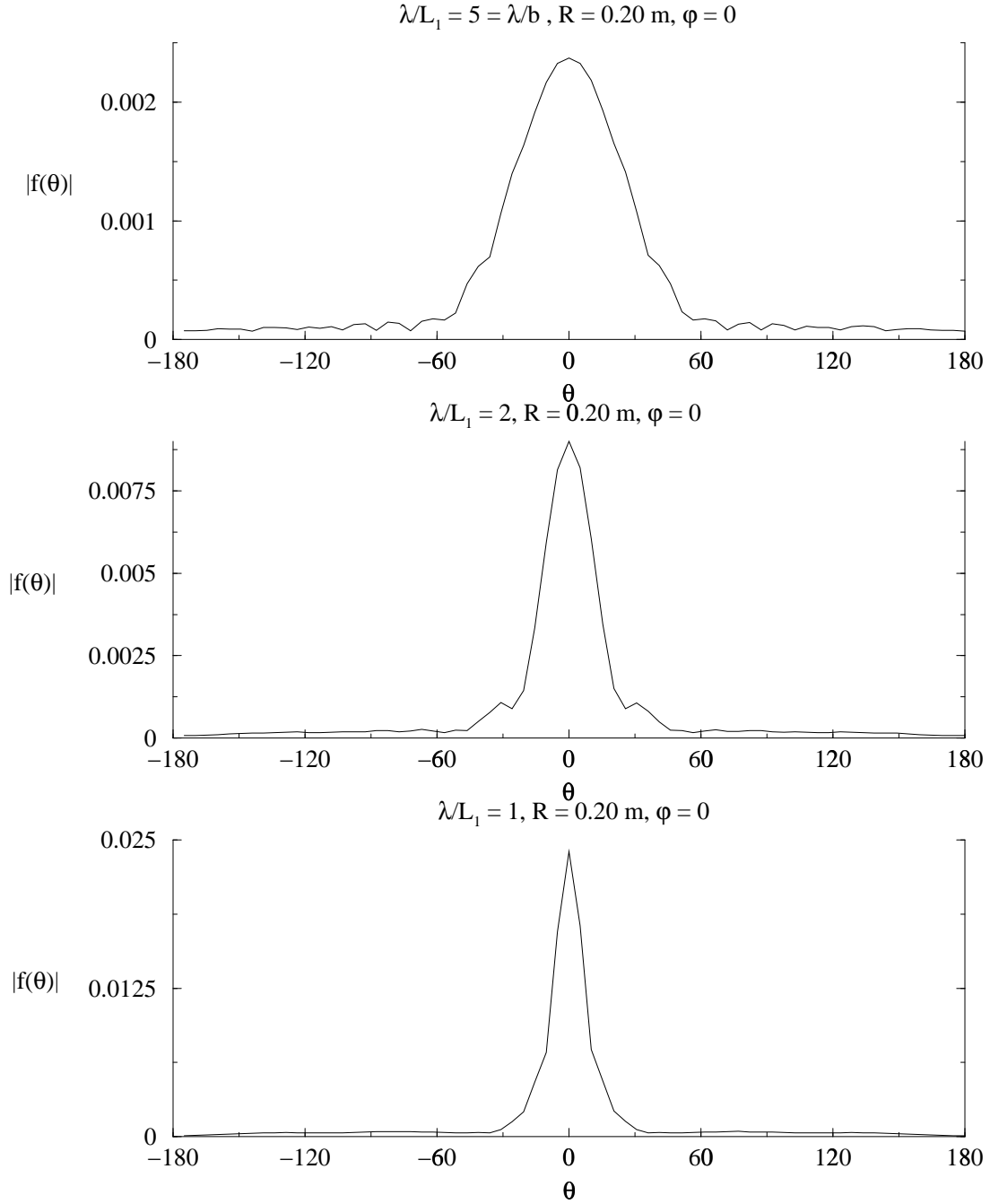


FIG. IV.57 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (en degrés) dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un dipôle de vorticité de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$.

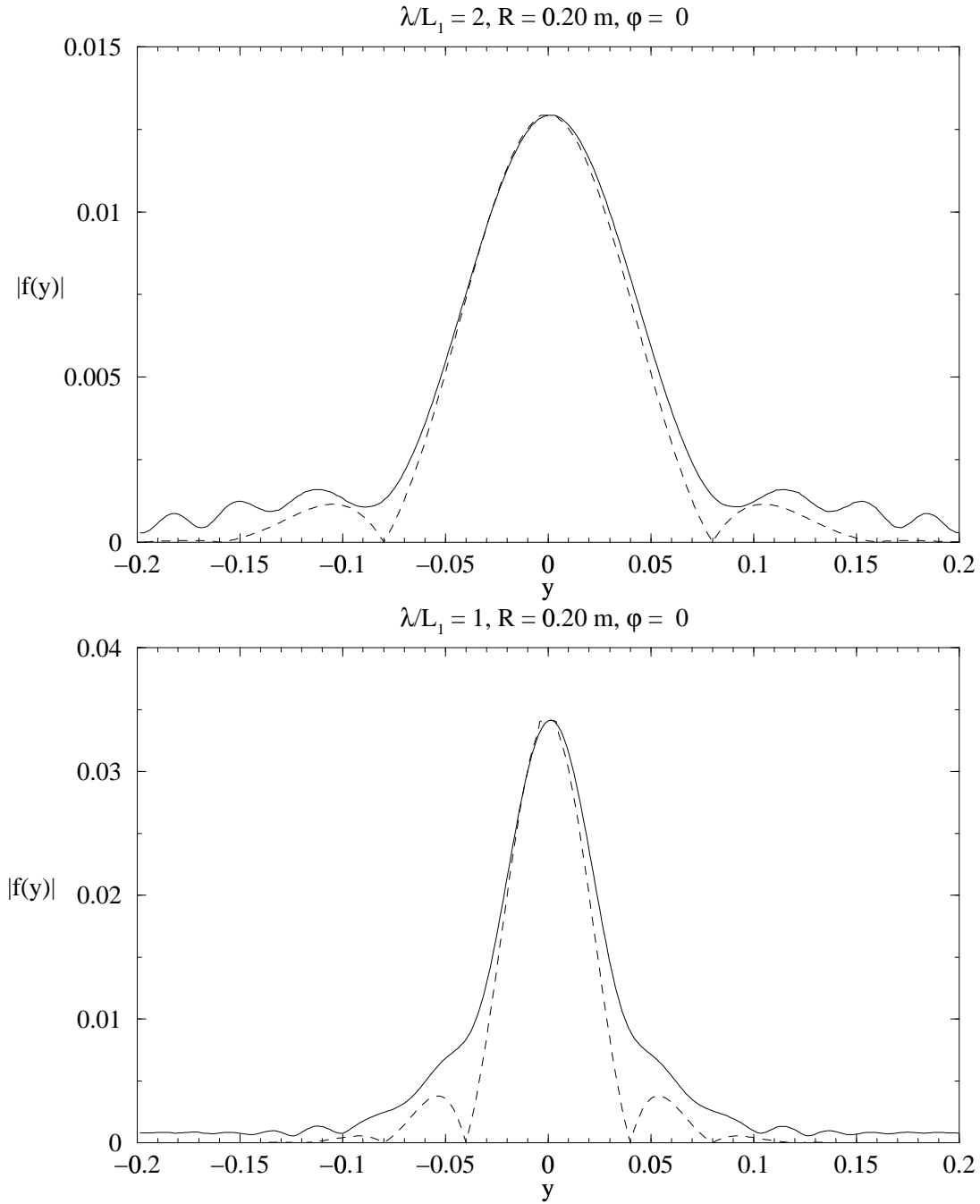


FIG. IV.58 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de la distance y (en mètres) au centre du domaine dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un dipôle de vorticité de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$ (y est exprimé en mètres): (—) résultat numérique, (---) résultat analytique déduit de la relation (2.8) dans le cadre de la première approximation de Born.

La figure IV.58 présente l'amplitude de diffusion en fonction de y pour $\lambda = L$ et $\lambda = 2L$, comparée à l'amplitude théorique déduite de la relation (2.10). On constate que les résultats numériques ne font qu'ébaucher l'allure de la courbe de diffraction. De plus, on observe sur la figure IV.58 la présence d'une autre modulation de l'amplitude de diffusion, de longueur d'onde plus petite, qui n'est liée ni au déplacement du dipôle lors des acquisitions, ni à des interférences entre l'onde incidente et l'onde diffusée (effet Doppler trop faible) comme cela était le cas dans les observations expérimentales [HP99], ni à des imprécisions dans le traitement de faibles niveaux de diffusion (figure IV.59 (b), l'amplitude de diffusion étant proportionnelle à \mathcal{M} dans le cadre de l'approximation de Born).

- Les imprécisions numériques ne sont pas dues aux imprécisions du traitement et liées par une diffusion peu importante : la figure IV.59 (b) présente l'amplitude de diffusion (normalisée par son maximum en $\theta = 0$) en fonction de y pour $\lambda = 2L$ et un nombre de Mach $\mathcal{M} = 10^{-2}$ et $\mathcal{M} = 10^{-3}$ (dans l'approximation de Born, la diffusion est proportionnelle à \mathcal{M} d'après les relations 2.8 et 2.5). Le phénomène est bien analogue pour ces deux nombres de Mach. Le manque de précision des diagrammes de diffraction est plutôt lié à l'échantillonnage spatial utilisé et aux imprécisions sur la longueur d'onde ;
- la modulation supplémentaire que l'on observe provient des effets de taille finie du domaine de calcul, liés à la qualité des conditions aux limites de la simulation numérique, dont nous avons déjà évoqué les limitations au paragraphe 4.6 du chapitre III. En effet, en s'éloignant du bord du domaine, ces oscillations sont moins importantes (figure IV.59 (a)) et on observe le même comportement dans le cas de la diffusion du son par un tourbillon de Taylor (1.1) de nombre de Mach $\mathcal{M} = 1.6 \cdot 10^{-2}$ et de taille caractéristique $L_1 = 0.01 m$ (figure IV.59 (c)).

2.6 Effet de l'orientation du moment dipolaire

Dans ce paragraphe, nous avons étudié l'influence de l'orientation du moment dipolaire \vec{P} du dipôle sur la diffusion du son.

2.6.1 Caractéristiques de la diffusion

Les figures IV.60-IV.63 présentent le champ de masse volumique sonore diffusée ρ_{diff} pour les configurations $\varphi = 0$, $\varphi = 45$ et $\varphi = 90$:

- pour $\varphi = 0$ (figure IV.60), le dipôle se comporte comme une lentille vis-à-vis du son diffusé. La diffusion est maximale en $\theta = 0$ et parfaitement symétrique par rapport au plan $y = 0$, qui est un plan de symétrie de ce problème de diffusion ;

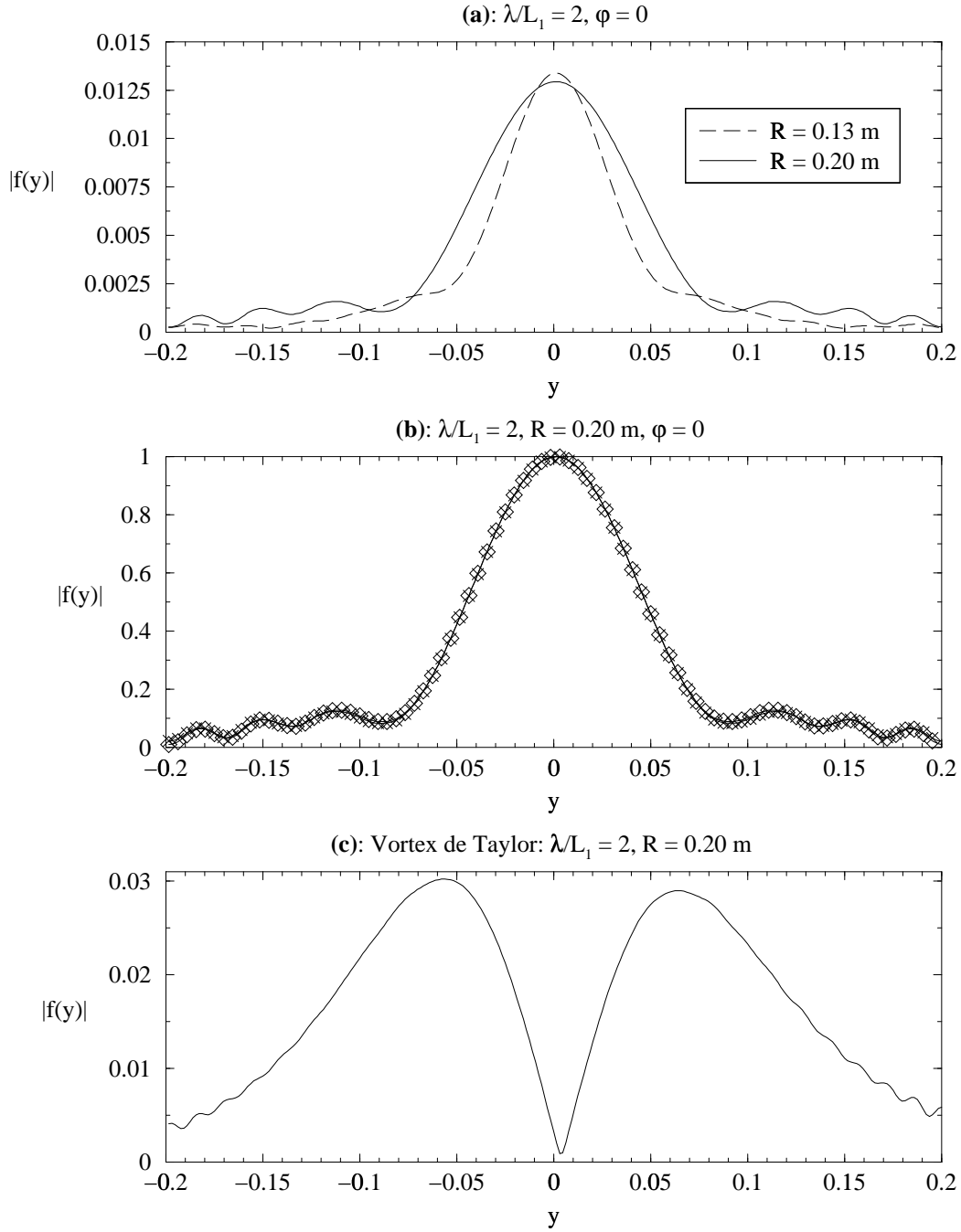


FIG. IV.59 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de la distance y (exprimé en mètres) au centre du domaine. (a) et (b) dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un dipôle de vorticité : (a) pour $\mathcal{M} = 10^{-3}$    deux distances R du dipôle ; (b)    une distance $R = 0.2 \text{ m}$ avec $\mathcal{M} = 10^{-3}$ ($\times - \times - \times$) et $\mathcal{M} = 10^{-2}$ ($\diamond - \diamond - \diamond$). (c) dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un tourbillon de Taylor de Mach $\mathcal{M} = 1.6 \cdot 10^{-2}$

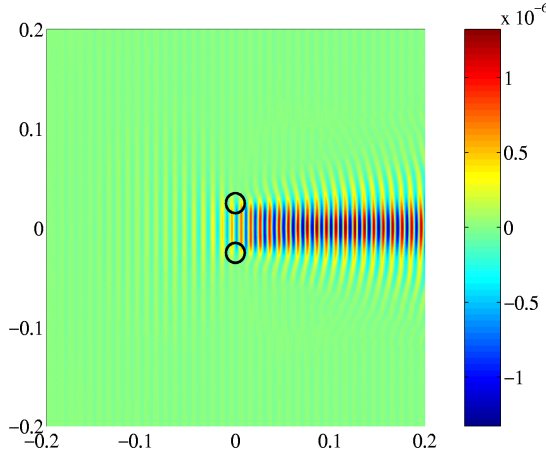


FIG. IV.60 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} dans le cas de l'interaction avec un dipôle de vorticité (sa position est repérée par les cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$, pour $\lambda = L_1 = 0.01\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

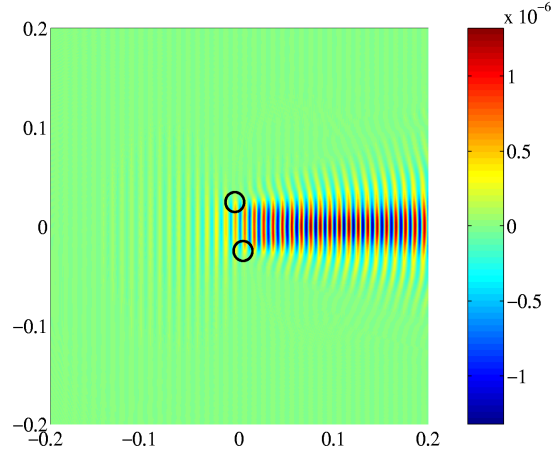


FIG. IV.61 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} dans le cas de l'interaction avec un dipôle de vorticité (sa position est repérée par les cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$, pour $\lambda = L_1 = 0.01\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

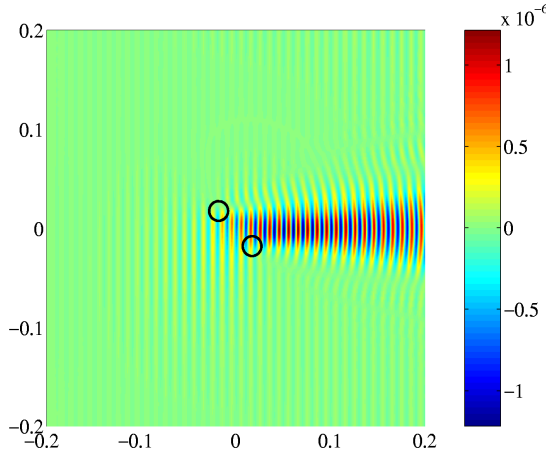


FIG. IV.62 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} dans le cas de l'interaction avec un dipôle de vorticité (sa position est repérée par les cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$, pour $\lambda = L_1 = 0.01\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

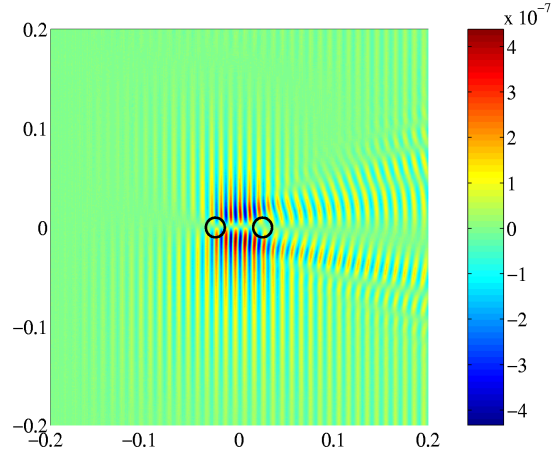


FIG. IV.63 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} dans le cas de l'interaction avec un dipôle de vorticité (sa position est repérée par les cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$, pour $\lambda = L_1 = 0.01\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

- pour $\varphi = 10^\circ$ (figure IV.61) et $\varphi = 45^\circ$ (figure IV.62), on ne note pas de différence sensible par rapport au cas $\varphi = 0$ pour la diffusion, à part un faible étalement du secteur angulaire de diffusion vers l'avant. Cependant, il existe un faible disymétrie de l'amplitude de diffusion, car le système n'est plus du tout symétrique par rapport au plan $y = 0$;
- pour $\varphi = 90^\circ$ (figure IV.63), l'allure de l'onde diffusée est modifiée de manière drastique : la diffusion est très importante autour de l'écoulement mais s'atténue très rapidement lorsque l'on s'éloigne du dipôle.

L'effet de l'orientation du moment dipolaire apparaît plus clairement sur les diagrammes polaires de l'amplitude de diffusion présentés sur la figure IV.64, à partir de l'expression analytique 2.8. Les lobes secondaires sont affectés par le changement d'orientation dès les angles faibles (un des deux lobes secondaires a disparu pour $\varphi = 45^\circ$) et dans la configuration $\varphi = 90^\circ$, le pic central a disparu au profit de deux pics symétriques par rapport à la direction incidente $\varphi = 0$. De plus, on peut noter que la diffusion est très peu efficace lorsque le moment dipolaire n'est plus perpendiculaire à la direction incidente du son.

2.6.2 Tracé des rayons acoustiques

Les figures IV.65-IV.67 montrent l'effet de l'orientation du moment dipolaire sur les rayons acoustiques, dans la limite de l'acoustique géométrique, pour un dipôle de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-2}$ avec $b = 0.05 m$. Nous avons choisi ce nombre de Mach afin de pouvoir visualiser un effet de réfraction des rayons par l'écoulement, qui est trop faible $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$. Nous avons utilisé la même méthode de trace de rayons décrite au paragraphe 2.2.2 du chapitre II.

Pour $\varphi = 0$, les rayons atteignant le dipôle sont focalisés, soit dans la direction incidente, soit dans deux directions parfaitement symétriques par rapport à la direction incidente et que l'on peut considérer comme les lobes secondaires de diffusion que nous avons déjà évoqués. La symétrie de la réfraction est brisée pour $\varphi = 45^\circ$, la convergence des rayons dans la direction incidente étant beaucoup plus faible. Pour $\varphi = 90^\circ$, on constate une réfraction des rayons par le premier tourbillon, effet qui est en partie compensé par la présence du second tourbillon, la réfraction étant globalement beaucoup plus faible.

2.7 Cas $\varphi = 90^\circ$

Nous nous sommes plus particulièrement intéressé à la configuration $\varphi = 90^\circ$, dans laquelle le moment dipolaire parallèle à la direction incidente du son. En effet, dans cette configuration, il est possible d'analyser clairement la contribution de chaque tourbillon à la diffusion du son. Les figures IV.68-IV.70 présentent le champ de masse volumique sonore diffusée ρ_{diff} dans la configuration $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$, $\varphi = 90^\circ$ et $\lambda = 2 L_1$, pour plusieurs valeurs du paramètre b . Nous avons utilisé la configuration numérique A2 pour $b = 0.05 m$ et $b =$

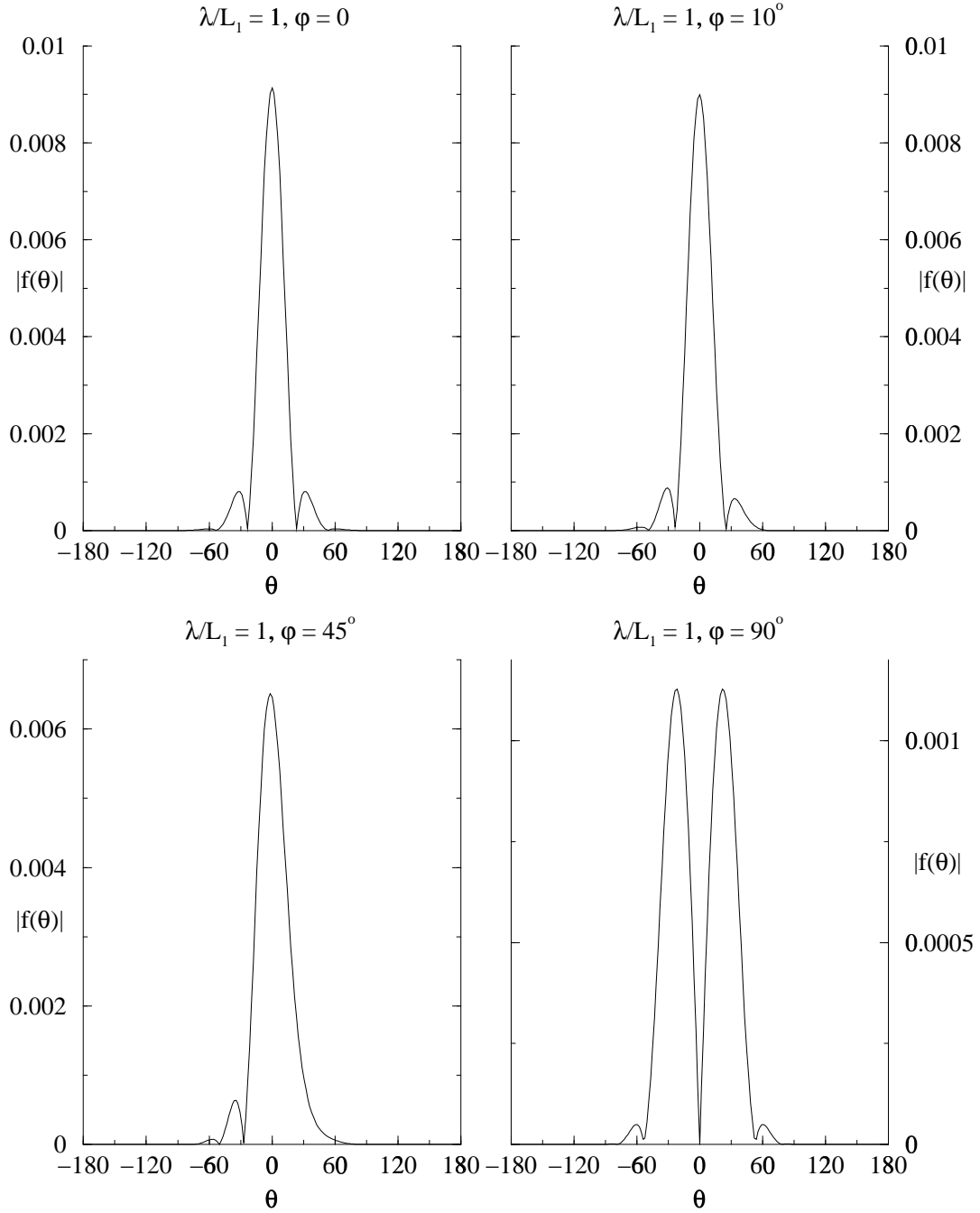


FIG. IV.64 – Amplitude de diffusion $|f|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (en degrés) dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un dipôle de vorticité de nombre de Mach $\mathcal{M} = 10^{-3}$ avec $b = 0.05 \text{ m}$.

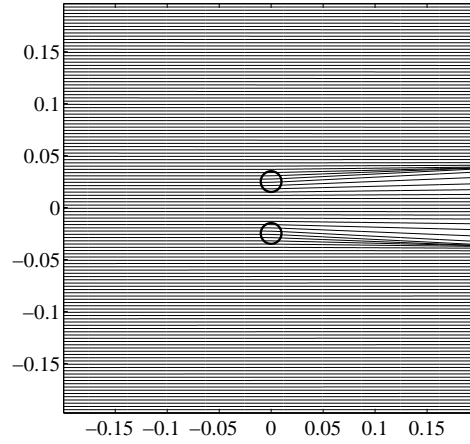


FIG. IV.65 – Rayons acoustiques réfractés par un un dipôle de vorticité de nombre de Mach $\mathcal{M} = 10^{-2}$ avec $b = 0.05\text{ m}$ et $\varphi = 0$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

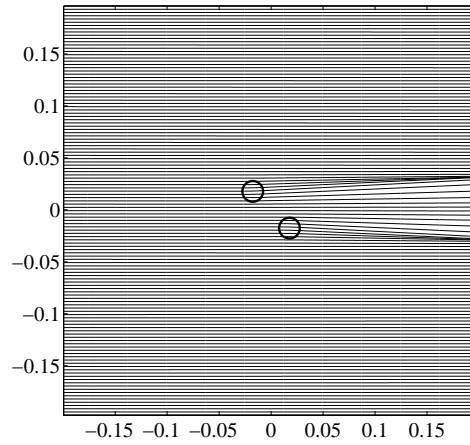


FIG. IV.66 – Rayons acoustiques réfractés par un un dipôle de vorticité de nombre de Mach $\mathcal{M} = 10^{-2}$ avec $b = 0.05\text{ m}$ et $\varphi = 45^\circ$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

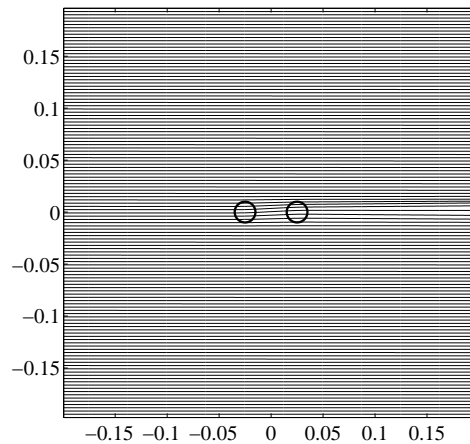


FIG. IV.67 – Rayons acoustiques réfractés par un un dipôle de vorticité de nombre de Mach $\mathcal{M} = 10^{-2}$ avec $b = 0.05\text{ m}$ et $\varphi = 90^\circ$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

0.0025 m et la configuration A1 pour $b = 0.1 m$. Il apparaît qu'une variation de la distance b n'a pas d'effet sur le mécanisme de la diffusion : le premier tourbillon, à circulation non nulle Γ , contribue à la diffusion en introduisant un déphasage (de l'ordre de π dans ce cas) entre les zones $y > 0$ et $y < 0$ de l'onde diffusée (effet Aharonov-Bohm produit par un tourbillon à circulation non nulle). Le deuxième tourbillon, de circulation $-\Gamma$, régularise ce déphasage de l'onde diffusée mais provoque un élargissement du secteur angulaire de diffusion. On comprend ainsi en détail le mécanisme de diffusion d'un écoulement tel que le vortex de Taylor que nous avons étudié au chapitre précédent et pour lequel les deux effets sont simultanés. Physiquement, le déphasage introduit par le premier tourbillon provient d'une dissymétrie dans l'advection des fronts d'onde de l'onde diffusée par l'écoulement moyen. Cette advection est globalement nulle après la traversée du dipôle, ce qui explique que le deuxième tourbillon régularise le déphasage, comme nous l'avons déjà remarqué dans la limite de l'acoustique géométrique (figure IV.67). La diffusion, qui est due aux gradients de vitesse, est produite par le dipôle. Cependant, elle ne devient visible qu'après la contribution du second tourbillon au déphasage, car le processus d'advection de l'onde sonore (effet purement cinématique) masque complètement le processus de diffusion (voir la partie V).

2.8 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la diffusion du son par un dipôle de vorticité, composé de deux tourbillons d'Oseen contrarotatifs et de circulation opposé. L'écoulement ainsi créé est à circulation nulle. Afin de nous rapprocher des conditions expérimentales [HP99], nous avons choisi un écoulement de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$. Ainsi, la diffusion du son peut être étudiée dans la limite de la première approximation de born.

Après avoir discuté la validité des différentes approximations en jeu lors de l'étude de la diffusion du son, nous avons étudié l'influence de la longueur d'onde du son incident et de l'orientation du moment dipolaire de l'écoulement sur l'efficacité de la diffusion du son. Il apparaît que la diffusion est plus efficace si la longueur d'onde est proche de la taille caractéristique d'un tourbillon, et qu'elle est optimale lorsque le moment dipolaire est perpendiculaire à la direction du son incident. Nous avons également fait un parallèle avec l'expérience optique des fentes d'Young, ce qui nous a permis de mettre en évidence le comportement des conditions aux limites dans le régime des faibles diffusions.

Enfin, nous nous sommes plus particulièrement intéressé à la diffusion du son lorsque le moment dipolaire est parallèle à la direction du son incident. Cette configuration nous a permis de décomposer le mécanisme de diffusion du son par un écoulement en deux étapes : un déphasage variable de l'onde diffusée selon la position du front d'onde par rapport à la direction incidente et le phénomène usuel de diffusion du son par les gradients de vitesse. Ces deux phénomènes sont généralement simultanés, ce qui empêche une telle analyse de la diffusion.

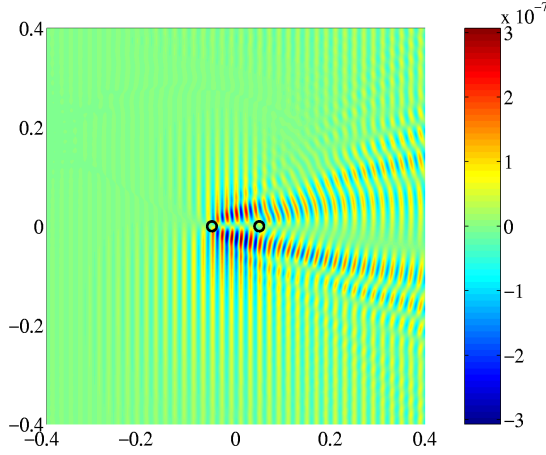


FIG. IV.68 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} dans le cas de l'interaction avec un dipôle de vorticité (sa position est repérée par les cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$, pour $\lambda = 2L_1 = 0.02\text{ m}$ et $b = 0.1\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

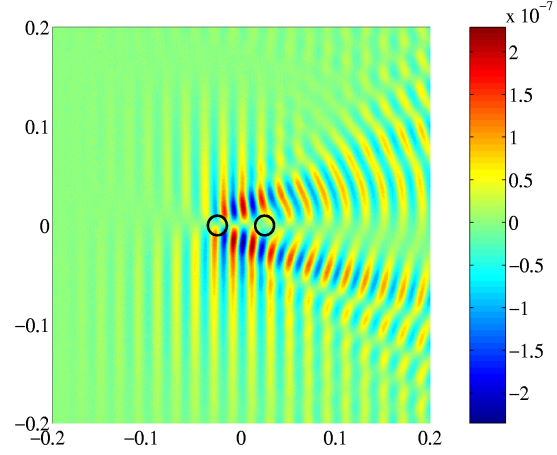


FIG. IV.69 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} dans le cas de l'interaction avec un dipôle de vorticité (sa position est repérée par les cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$, pour $\lambda = L_1 = 0.01\text{ m}$ et $b = 0.05\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

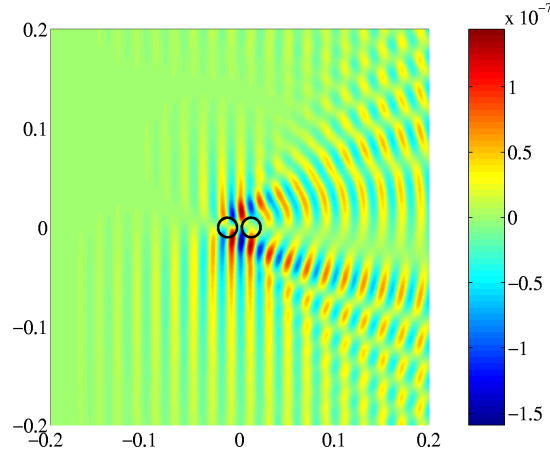


FIG. IV.70 – Onde sonore diffusée ρ_{diff} dans le cas de l'interaction avec un dipôle de vorticité (sa position est repérée par les cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 10^{-3}$, pour $\lambda = 2L_1 = 0.02\text{ m}$ et $b = 0.025\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

3. Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre deux types d'écoulements à circulation nulle : le tourbillon de Taylor et un dipôle de vorticité.

Le vortex de Taylor nous a permis de clarifier la validité des approximations relatives à l'utilisation de l'expression analytique de l'amplitude de diffusion : approximation du champ lointain et première approximation de Born. Il est ainsi apparu que le critère de champ lointain est assez facilement réalisable expérimentalement car il suffit de se placer à une distance R de l'ordre de la distance de Fraunhofer $R_{Fr} = 2\pi L^2/\lambda$ (paragraphe 1.3). De même, l'approximation de Born, qui est caractérisée analytiquement par $\mu \ll 1$ reste valable pour $\mu \leq 0.5$ (paragraphe 1.4.3). Ces deux conclusions expliquent les bons résultats expérimentaux obtenus en utilisant le son comme sonde d'un écoulement turbulent.

Il faut pourtant rester prudent quant à l'utilisation de l'expression (1.22) [Fab83] comme outil de détection de tourbillons. En effet, dans le cas du tourbillon de Taylor, l'amplitude de diffusion s'exprime selon (1.25) dans le cadre de la première approximation de Born et présente, à angle de diffusion θ fixé, un extr  mum pour

$$\frac{\lambda_m}{L_1} = 4\pi\sqrt{\frac{2}{5}}|\sin(\theta/2)|. \quad (3.1)$$

Ainsi, pour $\theta = 30^\circ$, $\lambda_m = 2L_1$. On peut donc détecter la présence d'un tourbillon et avoir accès à sa taille caractéristique, comme le suggère Ferziger [Fer74]. Cependant, la valeur de λ_m peut être située, selon le nombre de Mach de l'écoulement, dans une région où l'approximation de Born n'est plus vérifiée ($\mu \geq 0.5$).

Les résultats de la figure IV.71 montre qu'il faut être plus nuancé car il n'existe pas forcément de maximum selon la valeur de l'angle de diffusion si la première approximation de Born n'est pas bien vérifiée : on peut ne pas détecter de tourbillons ($\theta = 30^\circ$), ou ne pas avoir accès à leur taille caractéristique ($\theta = 10^\circ$ par exemple). Le seul cas fiable est $\theta = 0$, qui est inaccessible expérimentalement car l'effet Doppler est alors inexistant (relation 3.35 du chapitre I).

Nous avons également montré, avec le tourbillon de Taylor et une approximation polynomial de ce tourbillon, qu'il existe une longueur d'onde sonore résonante, de l'ordre de grandeur de la taille caractéristique du cœur du tourbillon, pour laquelle la section efficace de diffusion est maximale. De plus, lorsque la longueur d'onde diminue, l'amplitude de diffusion tend vers la valeur prédite par le tracé de rayons dans le cadre de l'acoustique géométrique.

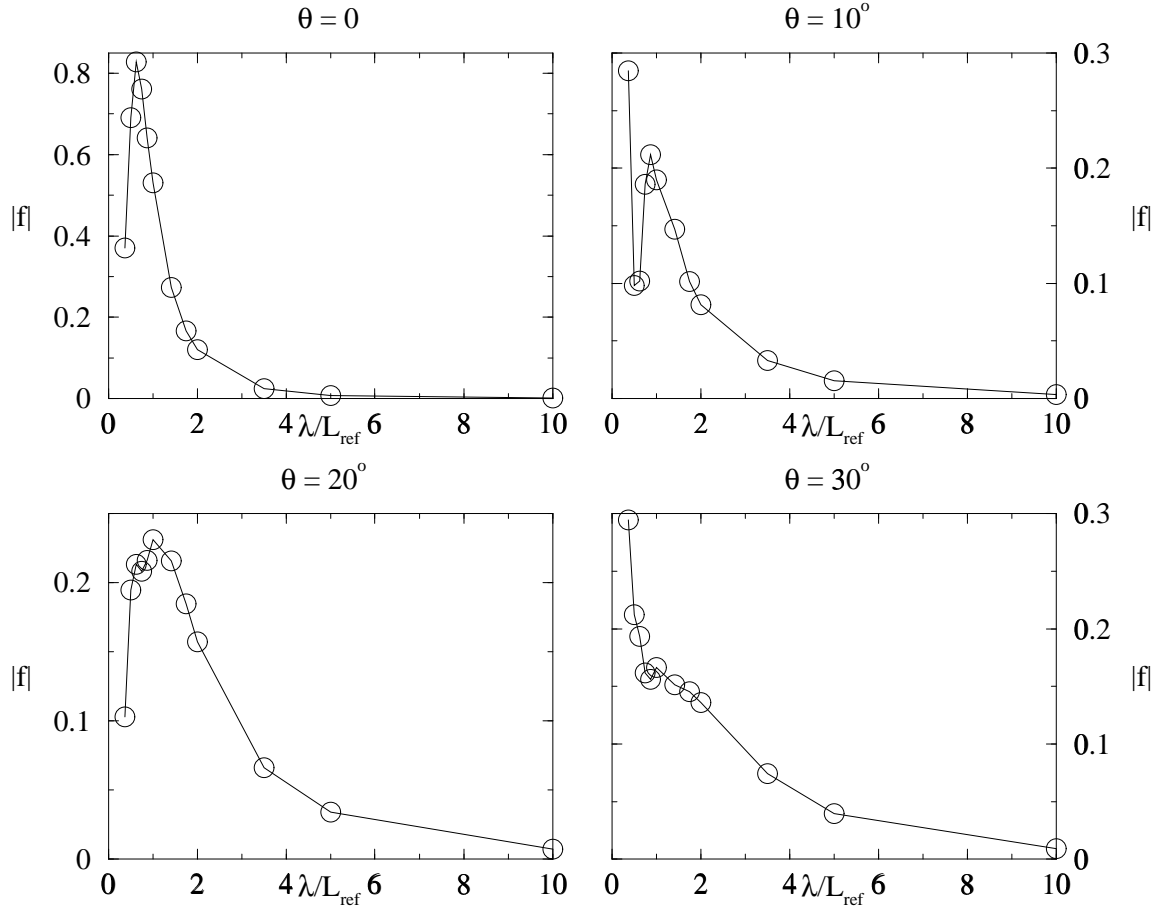


FIG. IV.71 – Amplitude de diffusion $|f(\theta)|$ en fonction du rapport λ/L_1 , à angle de diffusion θ fixé, dans le cas de l'interaction entre une onde plane incidente et un vortex de Taylor de nombre de Mach $\mathcal{M} = 0.16$ avec $L_1 = 0.01 \text{ m}$ (1.4.2).

Le dipôle de vorticité nous a permis de mieux comprendre le mécanisme de diffusion, qui est fortement influencé par la réfraction du son par l'écoulement moyen. Nous avons aussi mis en évidence, à l'aide de cet écoulement, une forte analogie entre la diffusion en acoustique et la diffraction en optique.

Chapitre V

Écoulements à circulation non nulle

Les montagnes d'Omi, maquillées d'une fine couche de neige, semblaient parées pour l'hiver rigoureux qui s'annonçait. Les flocons blancs voltigeaient au-dessus du lac Biwa et tombaient en tourbillonnant dans l'eau bleu marine.

S. Nagao.

1. Introduction

Nous avons étudié dans le chapitre précédent l'interaction entre une onde sonore et un écoulement à circulation nulle. Nous avons ainsi vu dans le cas d'un dipôle de vorticité que chacun des deux tourbillons introduit, en plus de la diffusion engendrée par les gradients de vitesse, un effet géométrique d'advection des fronts d'ondes par l'écoulement moyen. Cet effet est globalement nulle pour l'écoulement dipolaire, car les deux vortex sont contra-rotatifs.

Il peut cependant être prépondérant devant l'effet de la diffusion, selon le nombre de Mach de l'écoulement moyen. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à des tourbillons isolés, de circulation non nulle, puisqu'ils semblent occuper une place fondamentale dans le mécanisme d'interaction avec le son.

Ce type de tourbillons joue un rôle important dans l'étude de la turbulence [DCB91, FLC93, CDC95, CPL96, DPF98, AFP00] et dans les expériences de diffusion du son par la vorticité [BCL⁺80, Lab96, OGG⁺98, VMCL99, Man00]. D'un point de vue analytique, la diffusion du son par des tourbillons à circulation non nulle n'est pas complètement décrite :

- dans le cadre de la méthode des ondes partielles, la limitation provient de la validité de la méthode, qui impose généralement la limite des courtes longueurs d'ondes (chapitre II) ;
- dans le cadre de la première approximation de Born, l'amplitude de diffusion diverge dans la direction incidente (paragraphe 3.7.3 du chapitre I) : la dislocation des fronts d'ondes, engendrée par l'écoulement, est un effet d'ordre un [Cos99] et ne peut donc pas être décrite correctement par une méthode perturbative.

Il nous semble donc intéressant d'étudier l'interaction entre un tourbillon isolé à circulation non nulle et une onde sonore. Il s'agit d'une situation usuelle dans les expériences de diffusion du son, la différence provenant essentiellement de la nature turbulente de l'écoulement moyen en dehors du cœur du vortex [MB97, LP98, MRM⁺99]. Dans une première partie, nous étudions la diffusion du son par un tourbillon d'Oseen et nous montrons la nécessité de prendre en compte l'advection de l'onde sonore par l'écoulement moyen. Un article soumis pour publication est annexé dans une deuxième partie, où nos résultats numériques sont comparés à une expérience.

2. Vortex d'Oseen

2.1 Introduction

Nous considérons dans ce chapitre un tourbillon d'Oseen isolé de taille caractéristique L et de circulation Γ . La circulation de l'écoulement n'étant pas nulle, la première approximation de Born n'est pas vérifiée dans la direction incidente et l'amplitude de diffusion diverge. L'étude de l'influence du paramètre $\mu = \beta \mathcal{M}$ (relation (3.62) du chapitre I) sur la diffusion est donc inutile. Nous nous sommes focalisés sur l'influence de la longueur d'onde dans le processus de diffusion et sur l'importance de l'advection des fronts d'ondes par l'écoulement moyen.

Après avoir décrit le tourbillon d'Oseen étudié, nous discutons la validité des approximations physiques pour l'étude de la diffusion du son par cet écoulement. Nous présentons ensuite l'évolution de l'amplitude de diffusion en fonction de la longueur d'onde. Dans une dernière partie, nous prenons en compte l'advection de l'onde sonore incidente par l'écoulement moyen afin de séparer les contributions géométriques et ondulatoires de l'interaction son-écoulement.

2.2 Structure de l'écoulement

Le vortex d'Oseen est l'analogue, dans le cas d'un écoulement non visqueux, du vortex de Burgers ([Bat94], paragraphe 4.5) : en négligeant les phénomènes de dissipation visqueuse, sa taille caractéristique L_1 est constante.

La vorticité de ce tourbillon a l'allure d'une gaussienne :

$$\vec{\Omega}(\vec{r}) = \Omega_0 \exp \left[-\alpha \frac{r^2}{L_1^2} \right] \hat{z} \quad (2.1)$$

$\Omega_0 > 0$ signifie que l'écoulement tourne dans le sens trigonométrique direct. En utilisant la relation

$$\Omega(r) \hat{z} = \vec{\text{rot}} \left[v(r) \hat{\theta} \right] \implies \Omega(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v)}{\partial r} \quad (2.2)$$

en coordonnées cylindriques, on en déduit le champ de vitesse de cet écoulement :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp \left[-\alpha \frac{r^2}{L_1^2} \right] \right) \hat{\theta}. \quad (2.3)$$

$\alpha \simeq 1.256431$ afin que la vitesse du tourbillon soit maximale pour $r = L_1$. La circulation de ce tourbillon est liée à la vorticité maximale Ω_0 par

$$\Gamma = \frac{\Omega_0 \pi L_1^2}{\alpha} \quad (2.4)$$

et son nombre de Mach s'exprime selon

$$\mathcal{M} = \frac{|\Omega_0| L}{(1 + 2\alpha) c}. \quad (2.5)$$

La différence fondamentale avec les écoulements à circulation nulle que nous avons étudié dans la partie IV r s de dans la nature du champ de vitesse à l'extérieur : celui-ci décroît en $1/r$ lorsque l'on s'éloigne du coeur du tourbillon.

On en déduit les champs de pression et de masse volumique en considérant l'écoulement compressible, de manière analogue à ce que nous avons fait au paragraphe 1.2.1 de la partie IV :

$$p(\vec{r}) = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[1 - \frac{(\gamma - 1)\Gamma^2}{4\pi^2 c^2 r^2} f\left(\alpha \frac{r^2}{L^2}\right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.6)$$

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \quad (2.7)$$

où p_0 et ρ_0 sont la pression et la densité au repos et $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ la vitesse du son dans le milieu au repos. La fonction f a pour expression

$$f(x) = 0.5 - \exp(x) + 0.5 \exp(-2x) + x Ei(1, x) - x Ei(1, 2x) \quad (2.8)$$

avec $Ei(1, x)$ la fonction exponentielle intégrale défini par :

$$Ei(n, x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-xt)}{t^n} dt \quad \text{pour } x > 0 \quad (2.9)$$

Les figures V.1-V.4 présentent l'allure de la vorticité, de la vitesse, de la masse volumique et de la pression de cet écoulement pour un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$ ($\Gamma = 2.5 \text{ m}^2.s^{-1}$) avec $L_1 = 0.01 \text{ m}$.

2.3 Choix des paramètres

Nous avons fixé la taille caractéristique L_1 du tourbillon ($L_1 = 0.01 \text{ m}$). Il nous reste à fixer le nombre de Mach de l'écoulement, ce qui revient à imposer la circulation du tourbillon ou sa vorticité maximale. Le nombre de Mach est cependant limité dans la simulation numérique car la vitesse sur les parois du domaine de calcul ne doit pas être trop importante, au sens ou nous l'avons défini au paragraphe 3.5.5 du chapitre III.

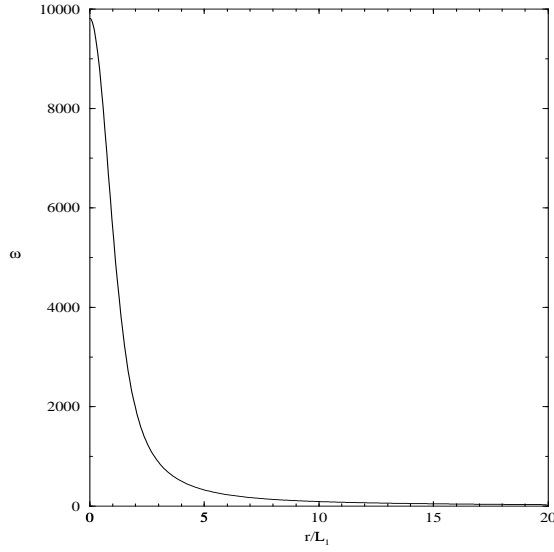


FIG. V.1 – Vorticité Ω (en s^{-1}) en fonction de r/L_1 pour le tourbillon d'Oseen (2.1) avec $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$.

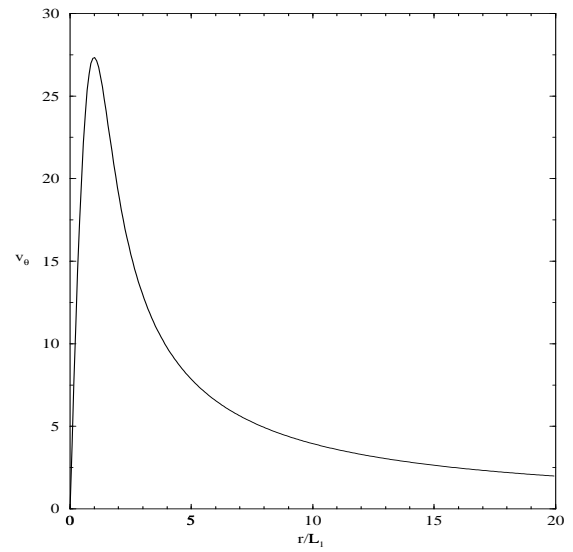


FIG. V.2 – Vitesse v_θ (en $m.s^{-1}$) en fonction de r/L_1 pour le tourbillon d'Oseen (2.3) avec $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$.

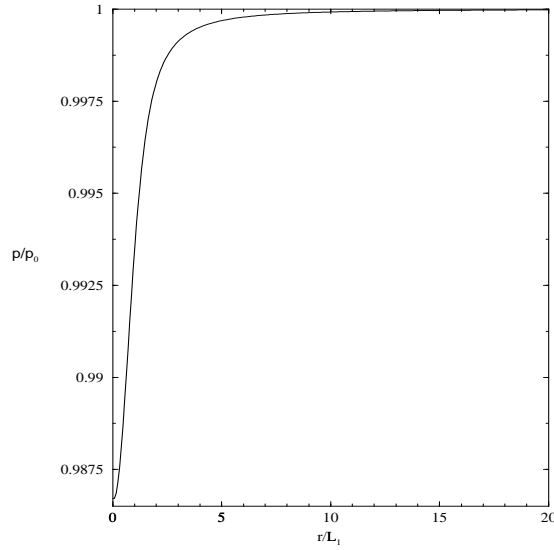


FIG. V.3 – Pression p/p_0 en fonction de r/L_1 pour le tourbillon d'Oseen (2.3) avec $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$.

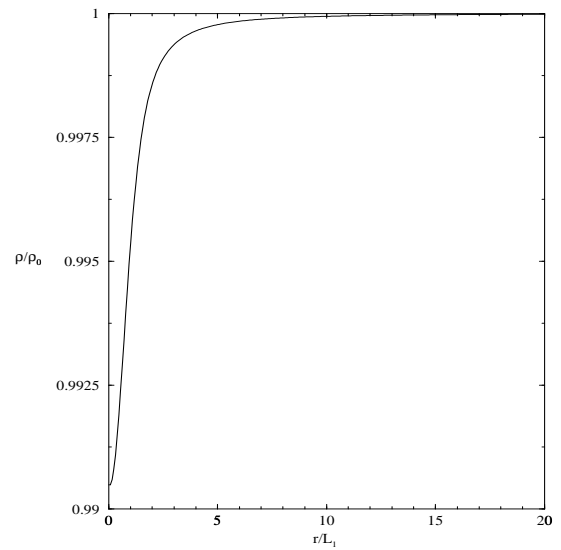


FIG. V.4 – Masse volumique ρ/ρ_0 en fonction de r/L_1 pour le tourbillon d'Oseen (2.3) avec $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$.

Nous avons ainsi choisi un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$ ($\Omega_0 = -10000 \text{ s}^{-1} < 0$) afin d'étudier l'interaction entre une onde sonore incidente et un tourbillon d'Oseen, à l'aide de la configuration numérique A1 décrite au paragraphe 1.2 du chapitre III.

L'onde sonore incidente est caractérisée par une longueur d'onde variable mais une amplitude constante $v_{inc} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$, qui correspond à une pression sonore incidente $p_{inc}/p_{ref} = 3.69.10^{-5}$ et à une masse volumique incidente $\rho_{inc}/\rho_{ref} = 2.63.10^{-5}$. Ce choix pour l'onde sonore nous assure que nous travaillerons dans le cadre de l'acoustique linéaire, puisque $v_{inc}/c_0 = 2.63.10^{-5} \ll 1$ [LL89b].

Pour chaque choix de longueur d'onde, nous avons choisi l'échantillonnage de manière à avoir environ 25 points par période temporelle, comme nous l'avons déjà précisé au paragraphe 1.2 du chapitre III.

2.4 Validité des approximations

Une fois les paramètres de l'écoulement choisi, nous allons tout d'abord étudié la validité des deux approximations importantes pour l'étude de la diffusion du son : l'approximation de champ lointain, qui permet de définir sans ambiguïté l'amplitude de diffusion $f(\theta)$ et la première approximation de Born permettant des comparaisons avec les travaux analytiques.

2.4.1 Approximation du champ lointain

La taille caractéristique de l'écoulement considéré est $L \simeq L_1$. Ainsi, le critère de champ lointain prend la forme

$$R_{Fr} \simeq \frac{2\pi (2L_1)^2}{\lambda} \quad (2.10)$$

et on se retrouve, vis-à-vis du critère de champ lointain, dans une situation comparable à celle du chapitre 1.3 de la partie IV. Rappelons ici la conclusion à laquelle nous étions arrivés : la limite de champ lointain est atteinte dès que $R \geq 0.5R_{Fr}$.

2.4.2 Première approximation de Born

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4 de la partie IV, l'approximation de Born est valide si le paramètre $\mu = \beta \mathcal{M}$ vérifie $\mu \ll 1$. Cependant, cette condition de validité de l'approximation de Born n'est valable que dans le cas où la pression diffusée peut-être définie dans tout l'espace, et en particulier dans la direction incidente (voir la démonstration du critère (3.62) obtenu au paragraphe 3.7.3 de la partie I).

Dans le cas d'un tourbillon à circulation $\Gamma \neq 0$, nous avons déjà signalé que, dans le cadre de la première approximation de Born, l'amplitude de diffusion diverge dans la direction incidente $\theta = 0$ (paragraphe 3.7.2 de la partie IV). Pour le vortex d'Oseen,

l'amplitude de diffusion a pour expression (relation 3.50 du chapitre 3 partie I) :

$$f_O(\theta) = \frac{\pi L_1^2 \Omega_0}{2 c \alpha} \sqrt{\frac{i}{\lambda}} \cos(\theta) \cotan(\theta/2) \exp \left[-\frac{4\pi^2}{\alpha} \left(\frac{L_1}{\lambda} \right)^2 \sin^2(\theta/2)^2 \right] \quad (2.11)$$

ce qui permet de constater la divergence de l'amplitude de diffusion lorsque $\theta \rightarrow 0$.

Ainsi, le critère précédent de validité de la première approximation de Born n'a plus de sens. Plus précisément, l'approximation de Born est valable pour un calcul de diffusion du son par un écoulement à circulation non nulle en dehors d'un secteur angulaire autour de la direction incidente dans lequel on ne peut pas séparer l'onde sonore entre une onde plane incidente et une onde diffusée [BCL⁺80]. Pour ce type d'écoulement, l'amplitude de diffusion dans la direction incidente, qui doit être non nulle afin de vérifier le théorème optique, doit ainsi être calculée à un ordre supérieur en Mach

- à l'ordre \mathcal{M}^2 pour prendre en compte la déformation de l'onde incidente par l'écoulement, comme l'ont fait Klimov et Prozorovskii [KP87] dans le cas d'un vortex de Hill à trois dimensions ;
- à l'ordre \mathcal{M}^4 dans le cas d'un tourbillon bidimensionnel, comme le soulignent Ford et Llewellyn Smith [FS99] pour des écoulements bidimensionnels, à l'aide d'un développement asymptotique pour $\lambda/L \gg 1$.

2.5 Évolution de la diffusion avec la longueur d'onde

Nous étudions dans ce paragraphe l'évolution de la diffusion en fonction de la longueur d'onde de l'onde incidente pour un tourbillon d'Oseen de taille caractéristique $L_1 = 0.01 m$ et de nombre de Mach $\mathcal{M} = 7.6 \cdot 10^{-2}$ ($\Omega_0 < 0$).

Nous allons tout d'abord employer la même procédure que dans le cas des écoulements à circulation nulle afin d'obtenir le champ sonore diffusé et l'amplitude de diffusion dans la limite de l'approximation de champ lointain. Dans le paragraphe suivant, nous prendrons en compte la réfraction des ondes sonores par l'écoulement moyen, afin de définir de manière plus claire l'onde diffusée. On définit ici l'onde diffusée de manière analogue à ce que nous avons fait pour les écoulements à circulation nulle :

$$\rho_{diff}^{pl} = \rho_{son} - \rho_{inc}^{pl} \quad (2.12)$$

où ρ_{inc}^{pl} est l'onde incidente plane se propageant dans le milieu au repos, i.e. sans écoulement moyen. On définit alors l'amplitude de diffusion comme nous l'avons fait au paragraphe 3.2 de la partie I dans la limite du champ lointain :

$$\rho_{diff}^{pl} = |\rho_{inc}| f^{pl}(\theta) \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}} \quad \text{pour } R \gg \frac{2\pi L^2}{\lambda} \quad (2.13)$$

ainsi que l'amplitude de diffusion généralisée (voir le paragraphe 1.3 du chapitre IV)

$$\rho_{diff}^{pl}(r, \theta) = |\rho_{inc}|(r, \theta) g^{pl}(r, \theta) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \quad (2.14)$$

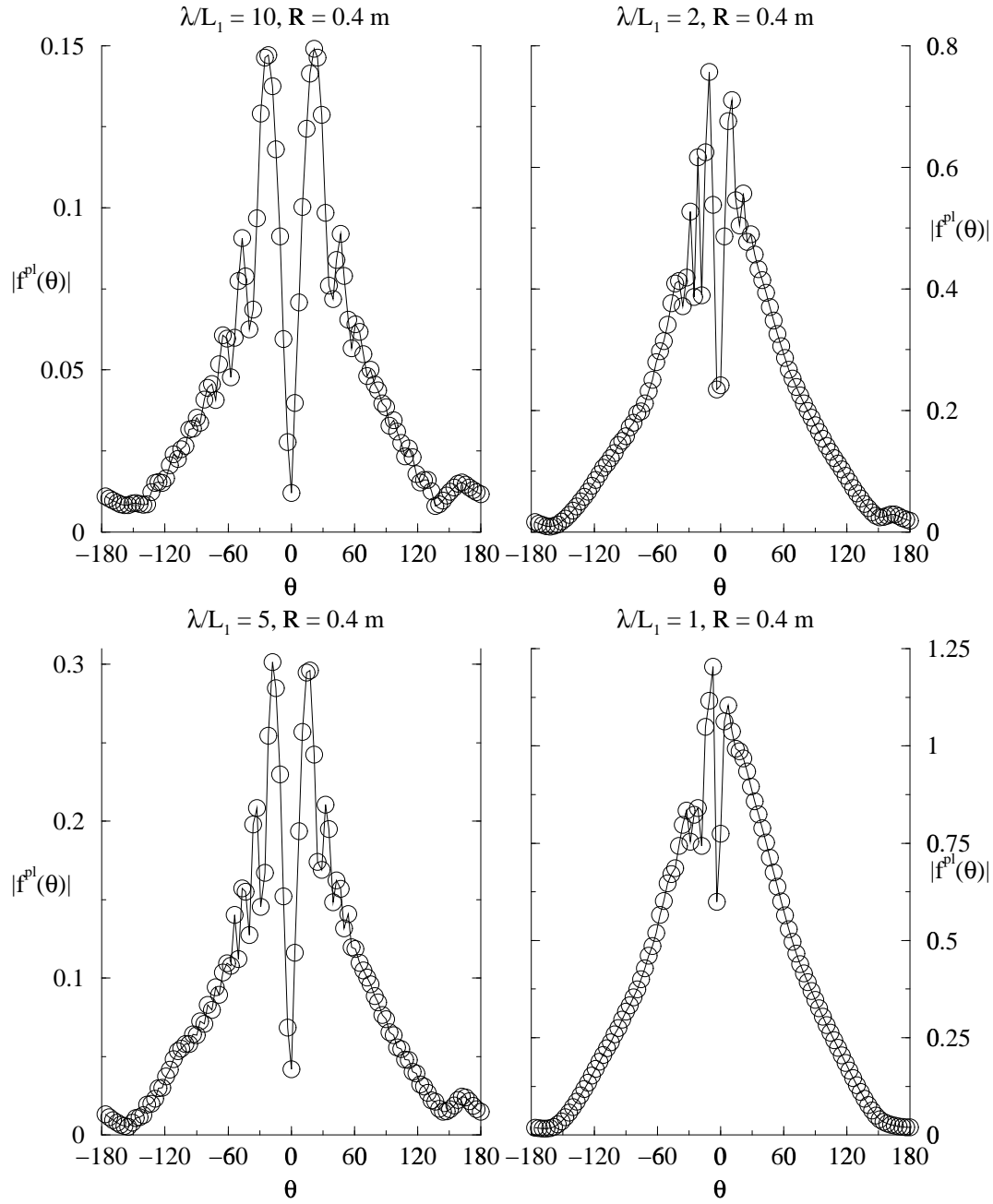


FIG. V.5 – Amplitude de diffusion $|f^{pl}|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (exprimé en degrés) dans le cas de la diffusion d'une onde plane par un vortex d'Oseen de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$. Les (O) représentent la position des microphones d'acquisition numérique.

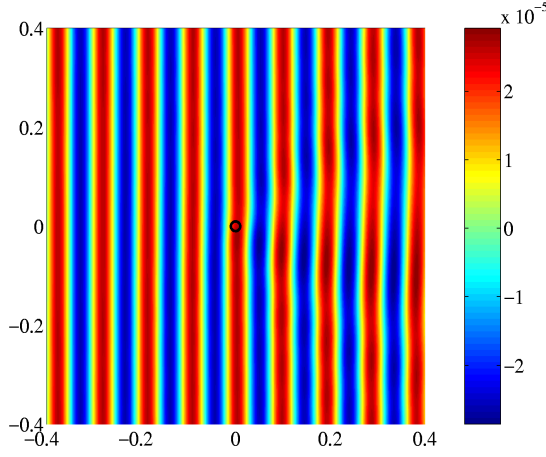


FIG. V.6 – Onde sonore p_s dans le cas de l'interaction avec un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6 \cdot 10^{-2}$, pour $\lambda = 10L_1 = 0.1$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

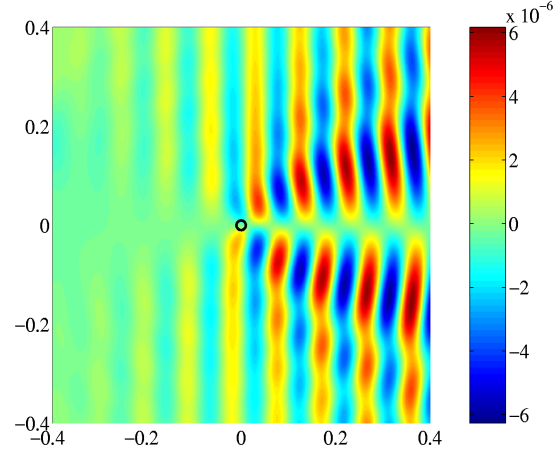


FIG. V.7 – Onde sonore diffusée ρ_{diff}^{pl} par un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6 \cdot 10^{-2}$, pour $\lambda = 10L_1 = 0.1$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

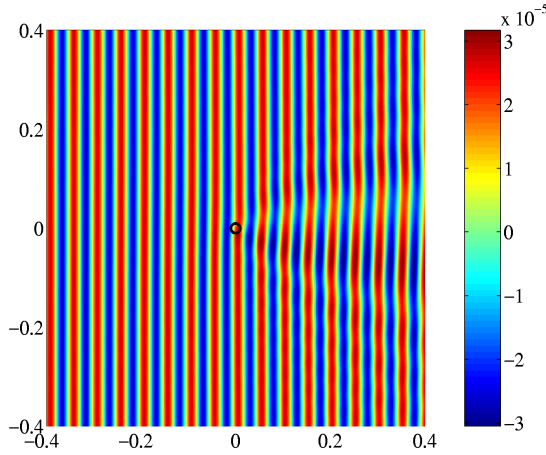


FIG. V.8 – Onde sonore p_s dans le cas de l'interaction avec un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6 \cdot 10^{-2}$, pour $\lambda = 5L_1 = 0.05$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

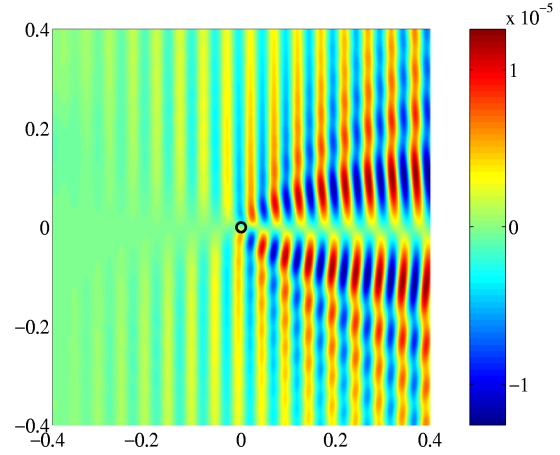


FIG. V.9 – Onde sonore diffusée ρ_{diff}^{pl} par un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6 \cdot 10^{-2}$, pour $\lambda = 5L_1 = 0.05$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

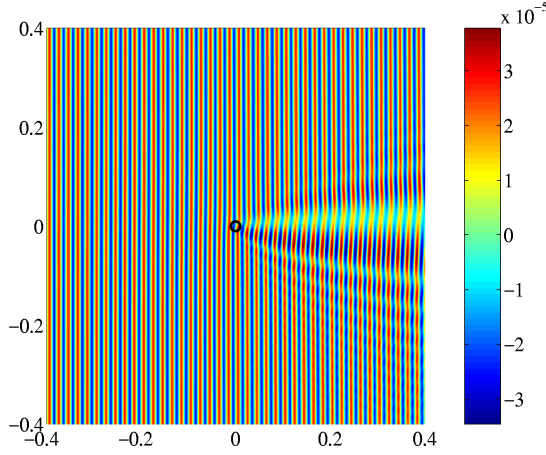


FIG. V.10 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$, pour $\lambda = 2L_1 = 0.02$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

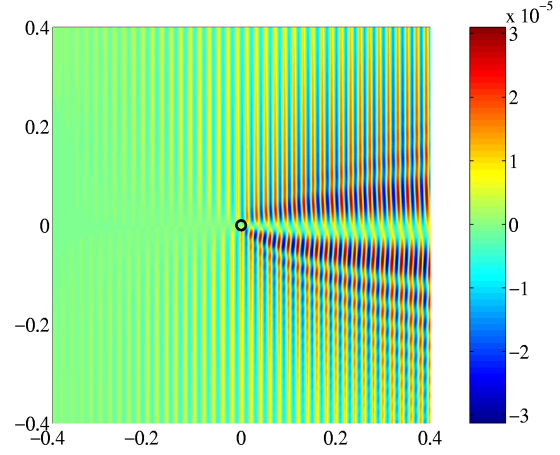


FIG. V.11 – Onde sonore diffusée ρ_{diff}^{pl} par un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$, pour $\lambda = 2L_1 = 0.02$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.



FIG. V.12 – Onde sonore ρ_s dans le cas de l'interaction avec un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$, pour $\lambda = L_1 = 0.01$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

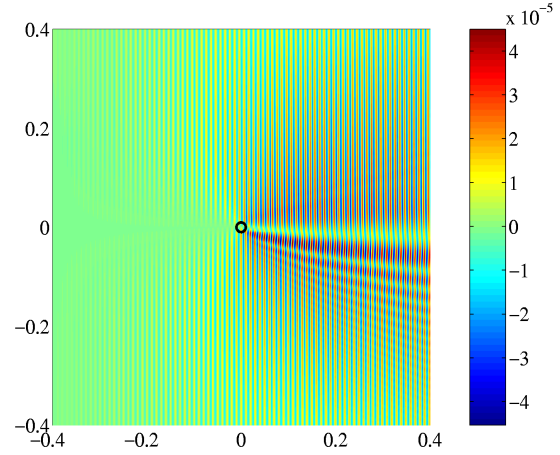


FIG. V.13 – Onde sonore diffusée ρ_{diff}^{pl} par un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$, pour $\lambda = L_1 = 0.01$ m. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

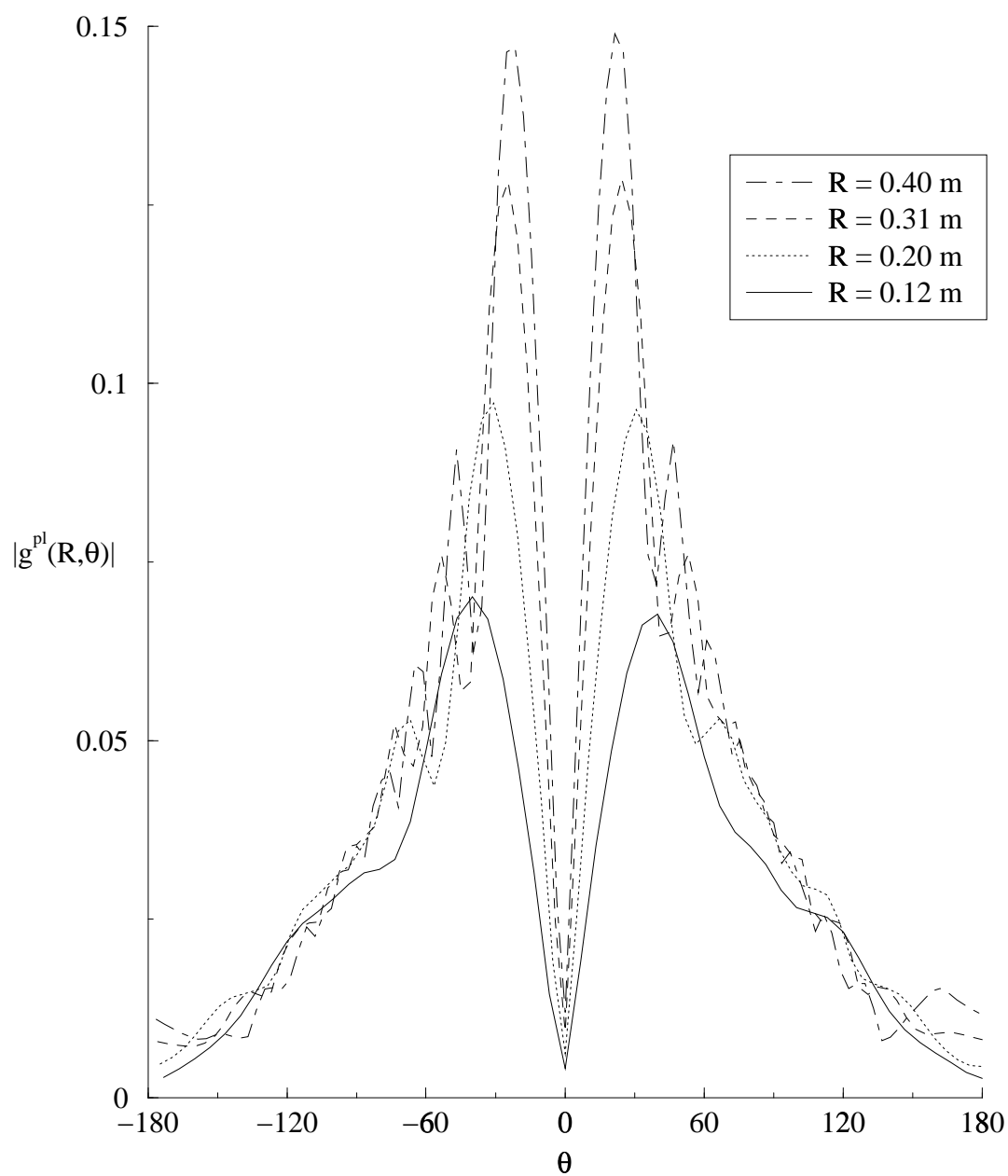


FIG. V.14 – Amplitude de diffusion $|g^{pl}|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (exprimé en degrés) dans le cas de la diffusion d'une onde plane par un vortex d'Oseen de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6 \cdot 10^{-2}$, pour $\lambda = 10L_1$.

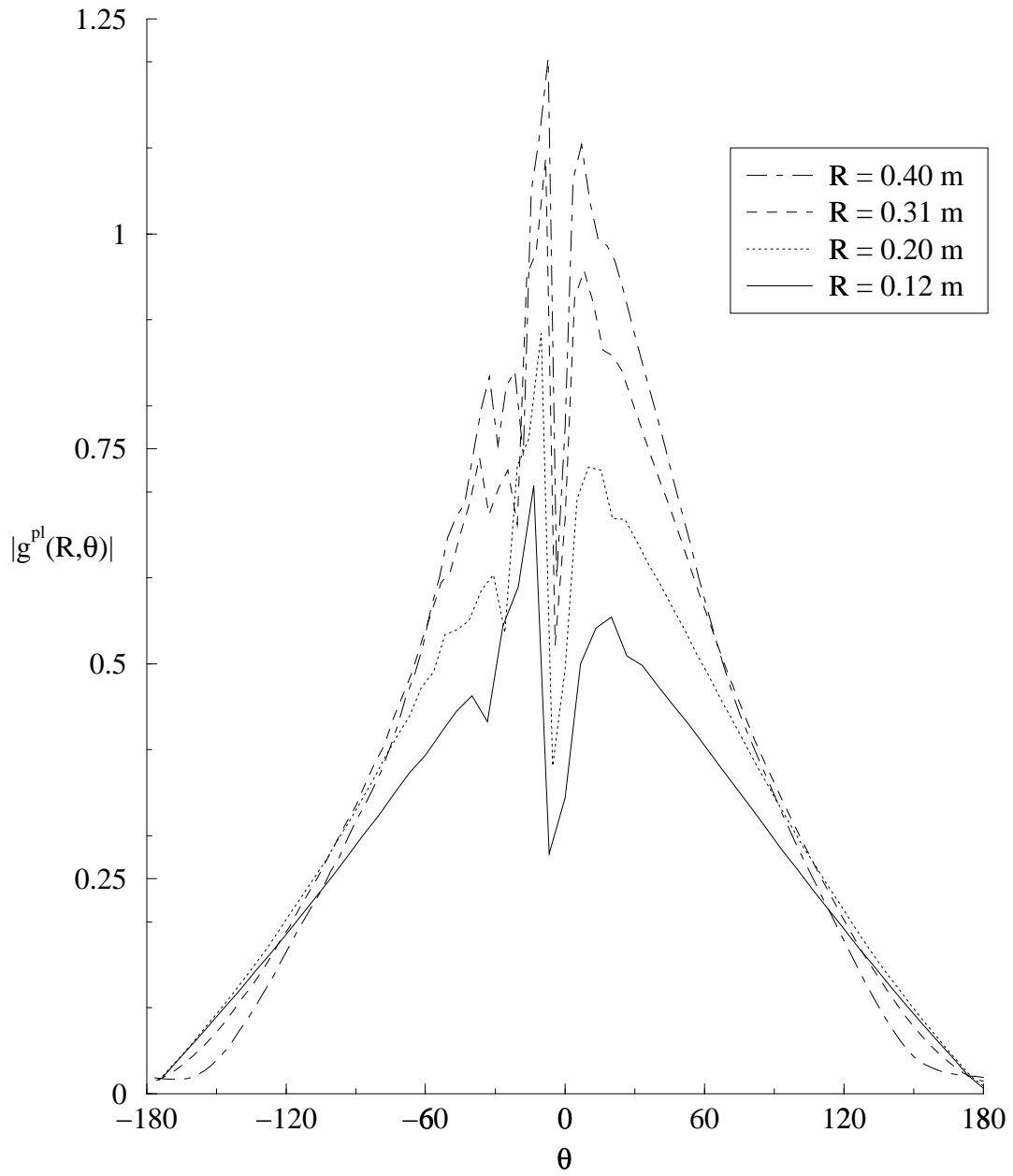


FIG. V.15 – Amplitude de diffusion $|g^{pl}|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (exprimé en degrés) dans le cas de la diffusion d'une onde plane par un vortex d'Oseen de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6 \cdot 10^{-2}$, pour $\lambda = 2L_1$.

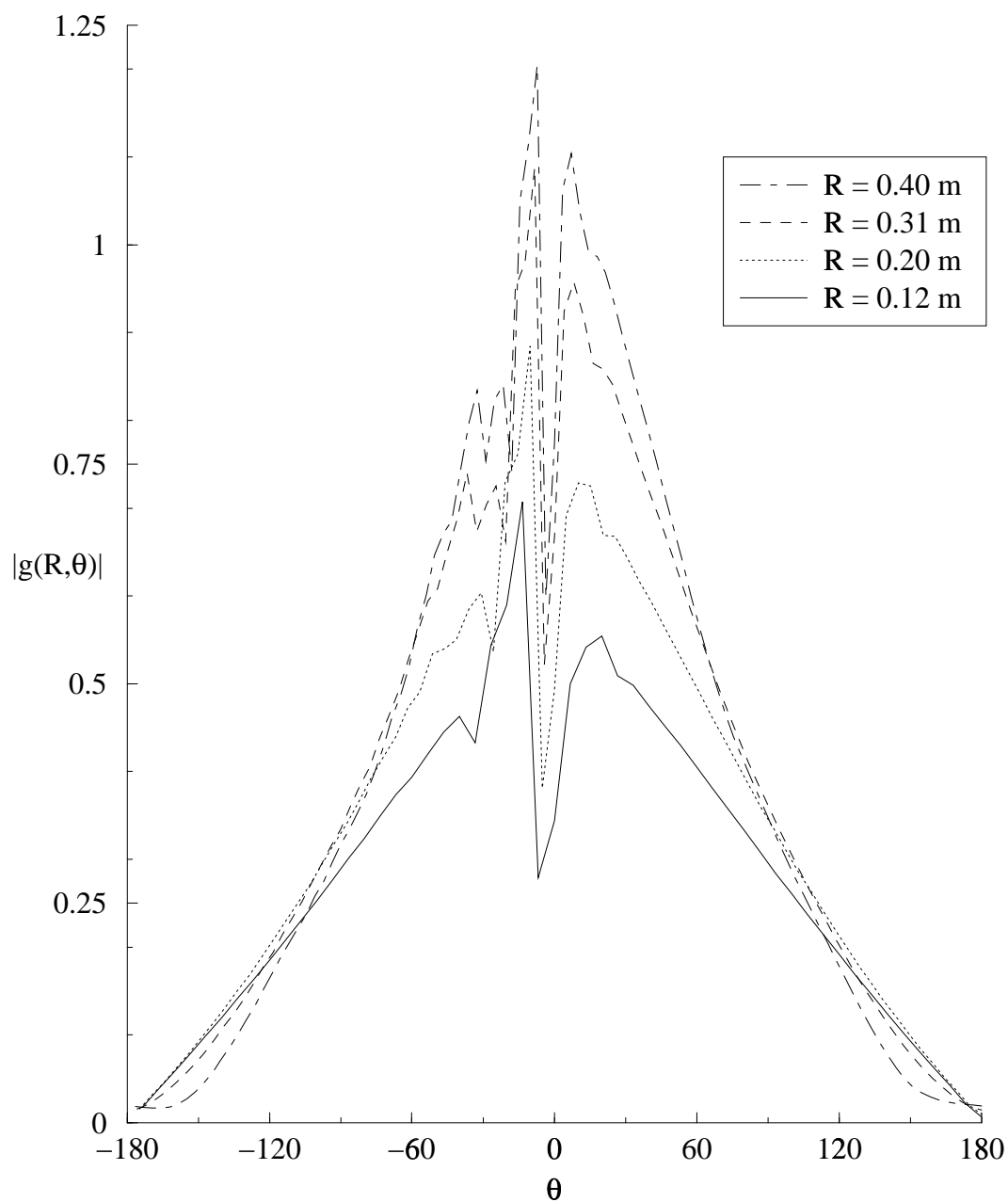


FIG. V.16 – Amplitude de diffusion $|g^{pl}|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (exprimé en degrés) dans le cas de la diffusion d'une onde plane par un vortex d'Oseen de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6 \cdot 10^{-2}$, pour $\lambda = L_1$.

La figure V.5 présente l'amplitude de diffusion f^{pl} en fonction de l'angle de diffusion, pour plusieurs rapports λ/L_1 , dans l'approximation du champ lointain ($R \simeq 0.4 m$). Les résultats obtenus sont analogues à ceux obtenus par Colonius et al. [CLM94] dans le cadre de leur simulation numérique. On constate que l'amplitude de diffusion augmente globalement lorsque la longueur d'onde diminue et que la valeur de l'amplitude dans la direction incidente $\theta = 0$ devient du même ordre de grandeur que le maximum de diffusion lorsque $\lambda \simeq L_1$. De plus, l'amplitude de diffusion devient supérieure à 1 pour $\lambda = L_1$ à cause de la déformation des fronts d'onde.

Cette analyse est confirmée par l'analyse des champs de l'onde sonore totale ρ_s et de l'onde sonore diffusée ρ_{diff}^{pl} présentés sur les figures V.6-V.13 pour $\lambda/L_1 = 10$, $\lambda/L_1 = 5$, $\lambda/L_1 = 2$ et $\lambda/L_1 = 1$. Pour les grandes longueurs d'onde, les fronts d'onde du champ sonore total sont uniquement déformés par l'advection du tourbillon : $\Omega_0 < 0$, ce qui signifie que les portions du front d'onde situées en $y < 0$ sont ralenties par rapport aux portions situées en $y > 0$. Par contre, pour des longueurs d'onde $\lambda \simeq L_1$, la diffusion devient très intense et son amplitude devient du même ordre de grandeur que celle de l'onde incidente.

Les figures V.14-V.16 présentent, pour une longueur d'onde donnée, l'évolution de l'amplitude de diffusion « généralisée » $g^{pl}(r, \theta)$ (voir la relation 1.17 de la partie IV) en fonction de la distance d'observation R . Comme on peut le constater, cette amplitude de diffusion ne converge jamais, pour θ donné, vers une valeur asymptotique, car on prend ici en compte à la fois la diffusion du son par les gradients de vitesse et l'advection de l'onde diffusée par l'écoulement moyen. La circulation totale de l'écoulement n'étant pas nulle, l'effet de l'advection se renforce lors de la propagation de l'onde dans le milieu, contrairement au cas où l'écoulement est un dipôle de vorticité et pour lequel les deux tourbillons ont des effets antagonistes et compensatoires sur la réfraction des ondes (voir le paragraphe 2.7 de la partie IV).

2.6 Prise en compte de l'advection

2.6.1 Introduction

L'influence de la longueur d'onde sur la diffusion du son peut être étudiée à l'aide de l'amplitude de diffusion. La définition (2.13) suppose que l'onde incidente est une onde plane. Cette hypothèse est vérifiée si le milieu diffusant est d'extension finie, ce qui implique en particulier que la circulation totale est nulle. Dans ce cas, le son se propage dans un milieu au repos en dehors de la zone de diffusion et l'onde sonore est nécessairement plane.

Dans le cas d'un tourbillon d'Oseen, le milieu diffusant n'est pas compact car les gradients de vitesse sont non nuls en tout point de l'écoulement, même si asymptotiquement loin du tourbillon, la vitesse décroît en $\Gamma/(2\pi r)$. Ainsi, l'onde plane n'est pas une solution asymptotique correcte pour étudier le phénomène de diffusion seul, car l'onde incidente « réelle » est déformée par l'écoulement moyen, même la limite $r \rightarrow \infty$ pour $\theta = 0$ [π]. On peut le constater sur la figure V.11 où l'on voit que même en amont du tourbillon (zone

où la diffusion est négligeable), la description (2.12) n'est pas en mesure de « supprimer » complètement l'onde incidente, en particulier près des frontières nord et sud du domaine de calcul.

Nous avons déjà vu précédemment que la diffusion du son par les écoulements est analogue au phénomène de diffraction en optique : principe d'Huygens-Fresnel (annexe 3.A de la partie I), réfraction des ondes sonores (paragraphe 1.5 de la partie I), expérience analogue aux fentes d'Young (paragraphe 2.5.3 de la partie IV). Sivoukhine [Siv84] définit la diffraction en optique selon :

« On entend par diffraction de la lumière tout écart à la loi de propagation rectiligne de la lumière, à condition que ces écarts ne puissent être expliqués par la réflexion, la réfraction ou l'incurvation des rayons lumineux dans des milieux à indice de réfraction variable ».

Ainsi, il nous semble important de séparer les deux effets de diffusion et de réfraction, la réfraction étant la contribution purement géométrique à la diffusion, au moins dans l'onde incidente qui n'est pas une onde plane.

2.6.2 Calcul de l'onde incidente réfractée

Nous avons pris en compte la réfraction de l'onde incidente par l'écoulement moyen du tourbillon à l'aide de l'approche géométrique de Klimov *et al.* [KP87] que nous avons décrite au paragraphe 1.7 de la partie I : dans le cas d'un écoulement moyen stationnaire de vitesse $\vec{v}_0(\vec{r})$, de nombre de Mach $\mathcal{M} \ll 1$, la déformation, due à la réfraction de l'onde sonore incidente

$$\rho_{inc}^k = \rho_{inc0} \exp \left[-i\omega t + i\vec{k}_i \cdot \vec{r} + i\varphi_r(\vec{r}) \right] \quad (2.15)$$

s'écrit (relation 1.70)

$$\frac{d\varphi_r}{dk_i}(\vec{r}) = -\frac{\omega}{c^2} \left[\hat{k}_i \vec{v}_0(\vec{r}) \right]. \quad (2.16)$$

Grâce aux relations (2.15) et (2.16), il est alors possible, en négligeant la variation d'amplitude, de reconstruire l'onde sonore incidente ρ_{inc}^k dans le domaine de calcul par d'une simple intégration numérique de type approximation d'Euler [PFTV93], en posant comme condition initiale que l'onde est plane au niveau de l'émetteur sonore (paroi Ouest du domaine d'étude), ce qui représente déjà une approximation puisque la vitesse du tourbillon n'est pas nulle ni même égale à la vitesse de déplacement de l'émetteur sonore, l'écoulement étant considéré comme non visqueux. De plus, nous avons négligé les variations dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde incidente, de sorte que $\hat{k}_i = \hat{x}$ et $dk_i = dx$.

Les figures V.17 et V.18 présentent la partie réelle de l'onde sonore incidente ρ_{inc}^k déduite de la relation (2.15) pour $\lambda/L_1 = 10$ et $\lambda/L_1 = 2$. On constate que cet effet est cumulatif pour la réfraction de l'onde incidente par le tourbillon. Il s'agit ici, même dans la limite des grandes longueurs d'onde $\lambda/L_1 = 10$ de l'effet purement géométrique de l'écoulement sur l'onde incidente.

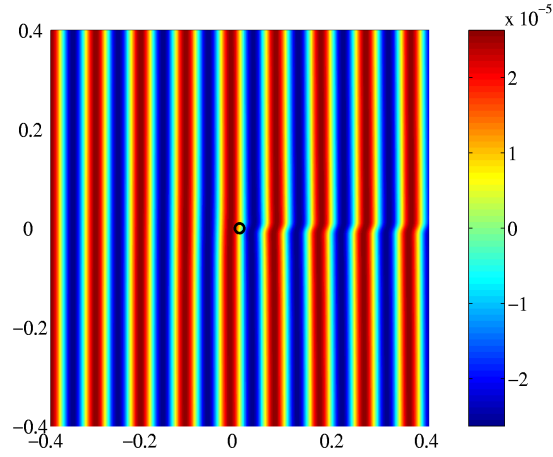


FIG. V.17 – Onde sonore incidente ρ_{inc}^k réfractée par un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$, pour $\lambda = 10L_1 = 0.1\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

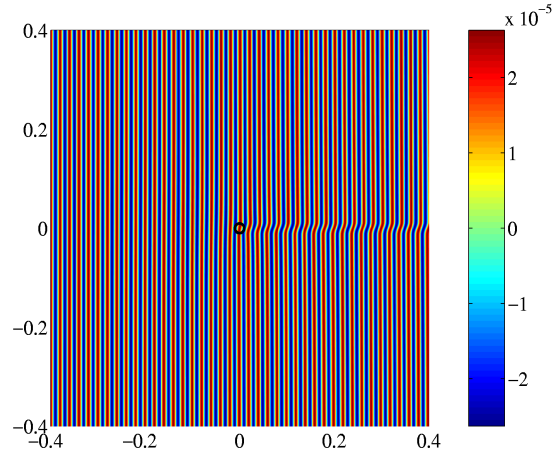


FIG. V.18 – Onde sonore incidente ρ_{inc}^k réfractée par un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$, pour $\lambda = 2L_1 = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

2.6.3 Champ sonore diffusé

On peut accéder à l'onde diffusée par le tourbillon en prenant en compte la réfraction de l'onde incidente ρ_{inc}^k :

$$\rho_{diff}^k = \rho_{son} - \rho_{inc}^k. \quad (2.17)$$

Les figures V.19-V.22 présentent l'onde sonore diffusée ρ_{diff}^k pour $\lambda/L_1 = 10$, $\lambda/L_1 = 2$ et $\lambda/L_1 = 1$, déduite de la relation (2.17) où ρ_{son} est le champ sonore issu des simulations numériques (figure III.2 du chapitre III). Il est évident que l'onde diffusée est elle aussi réfractée par l'écoulement moyen, comme le confirme les figures présentées, ce qui implique qu'il est difficile de définir une amplitude de diffusion $f(\theta)$ indépendante de la distance à l'écoulement, puisque l'effet du déphasage est cumulatif.

En comparant les champs diffusés avec ceux obtenus au paragraphe précédent, on constate que l'on a éliminé la réfraction de l'onde incidente. Il reste une faible contribution de l'onde incidente due à la dispersion numérique du code et à un faible déphasage résiduel entre ρ_{inc}^k et ρ_{son} , notamment pour $\lambda \simeq L_1$ où la dispersion numérique est plus importante (voir le paragraphe 4.4 de la partie III).

Comme nous l'avons déjà signalé au chapitre II, il n'est pas possible d'effectuer la décomposition (2.17) entre l'onde incidente réfractée ρ_{inc}^k et l'onde sonore totale ρ_s partout dans l'espace (annexe II.B). C'est bien ce que l'on observe sur les figures V.19-V.22, où persiste un déphasage dans l'onde diffusée. Nous reviendrons sur l'analyse de ce déphasage au paragraphe 3.

Lorsque la longueur d'onde diminue, on constate que la diffusion devient plus importante, phénomène que nous avons déjà observé en ne soustrayant qu'une onde incidente plane (paragraphe 2.5). Par contre, on voit clairement ici que l'on étudie de manière plus précise le phénomène de diffusion, puisque l'on observe un phénomène analogue à celui observé dans le cas d'un tourbillon isolé à circulation nulle (paragraphe 1.7.2 de la partie IV) : lorsque la longueur d'onde diminue, la diffusion est de plus en plus localisée dans un secteur angulaire autour de la direction incidente $\theta = 0$.

La réfraction par l'écoulement moyen agit aussi bien sur l'onde incidente que sur l'onde diffusée, avec un effet cumulatif au fur et à mesure de la propagation. Ainsi, le problème reste entier pour une définition de l'amplitude de diffusion : par analogie avec la relation (2.13), on peut définir

$$\rho_{diff}^k = |\rho_{inc}^k| f^k(\theta) \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}} \quad \text{pour } R \gg \frac{2\pi L^2}{\lambda} \quad (2.18)$$

en utilisant la relation (2.17). Cependant, en étudiant les figures V.19-V.22, il semble clair que cette définition conduira à une allure de $f^k(\theta)$ voisine de celle de $f^{pl}(\theta)$ car la diffusion a essentiellement lieu vers l'avant. En particulier, la décomposition (2.18) est incomplète car elle ne prend pas en compte l'advection de l'onde diffusée, qui ajoute un déphasage supplémentaire à celui de $|\rho_{inc}^k|$. Ainsi, l'amplitude de diffusion « généralisée » correspondante $g^k(r, \theta)$ ne converge jamais à θ fixé.

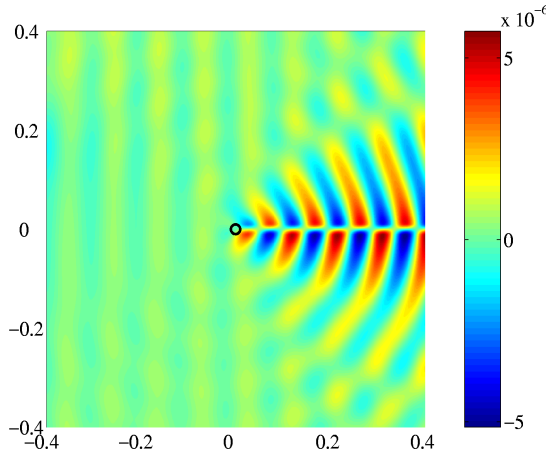


FIG. V.19 – Onde sonore diffusée ρ_{diff}^k dans le cas de l'interaction avec un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$, pour $\lambda = 10L_1 = 0.1\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

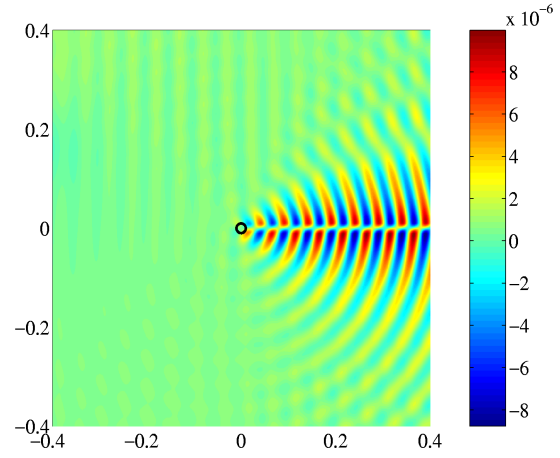


FIG. V.20 – Onde sonore diffusée ρ_{diff}^k dans le cas de l'interaction avec un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$, pour $\lambda = 5L_1 = 0.05\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

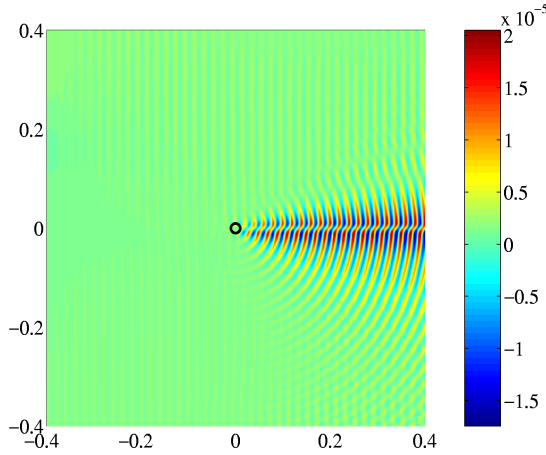


FIG. V.21 – Onde sonore diffusée ρ_{diff}^k dans le cas de l'interaction avec un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$, pour $\lambda = 2L_1 = 0.02\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

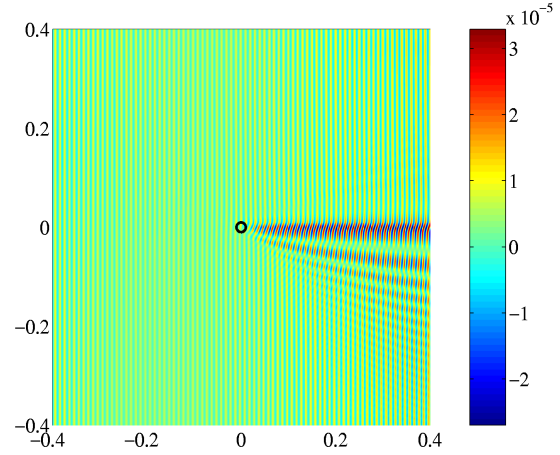


FIG. V.22 – Onde sonore diffusée ρ_{diff}^k dans le cas de l'interaction avec un vortex d'Oseen (sa position est représentée par le cercle de rayon L_1) de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6.10^{-2}$, pour $\lambda = L_1 = 0.01\text{ m}$. Les unités sur chaque axe sont en mètres.

2.7 Conclusion

Nous avons étudié dans ce paragraphe l'interaction entre une onde sonore et un écoulement tourbillonnaire de circulation non nulle. Nous avons ainsi mis en évidence deux effets de l'écoulement moyen sur l'onde sonore : advection des fronts d'ondes et diffusion de l'onde incidente. Ces deux effets, que nous avons déjà identifiés lors de l'étude d'un dipôle de vortacité, rendent l'analyse physique de l'interaction plus difficile. En effet, le problème de diffusion doit être reformulé car la zone d'interaction avec le son n'est plus spatialement localisée. On comprend désormais clairement pourquoi la première approximation de Born conduit à une divergence dans la direction incidente : il ne s'agit pas, comme nous l'avons suggéré [BL95], du caractère non physique de l'onde plane qui conduirait à un problème mal posé, mais bien du fait que l'on ne considère ni la déformation de l'onde incidente par l'écoulement [KP87], ni la déformation de l'onde diffusée, i.e. de l'onde ayant interagit avec les gradients de vitesse de l'écoulement moyen, et dont la structure a été mise en évidence au paragraphe 2.6.

3. Étude d'une configuration expérimentale

Nous avons effectué des simulations numériques afin de pouvoir les comparer avec les résultats expérimentaux de Labbé et al. [Lab96, LP98]. Cette comparaison, issu d'une collaboration avec Raül Labbé, a donné lieu à une publication soumise, et qui est reproduite à la fin de ce chapitre. Nous ne détaillerons brièvement ici que quelques points.

Configuration d'étude

Nous avons choisi un domaine de simulation de taille $0.7\text{ m} \times 0.2\text{ m}$, discrétisé à l'aide d'un maillage 896×256 ($dx = 7.81 \cdot 10^{-4}\text{ m} = dy$). Le tourbillon d'Oseen, dont nous avons déjà détaillé la structure au paragraphe 2.2, est caractérisé par une taille $L_1 = 0.01\text{ m}$ et un nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 1.9 \cdot 10^{-2}$ ($\Omega_0 = -2500\text{ s}^{-1}$). Il est situé à une distance $x_0 = 0.2\text{ m}$ du bord Ouest du domaine et à une distance $y_0 = 0.1\text{ m}$ du bord Sud du domaine, comme on peut le voir sur la figure V.23 qui présente le champ de masse volumique du vortex avant l'émission sonore et après ajustement numérique de la condition initiale (temps $t = 0$ défini sur la figure III.2 du chapitre III).

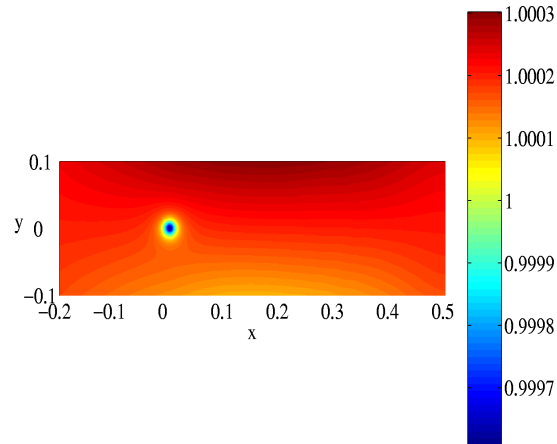


FIG. V.23 – Masse volumique (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) du tourbillon d'Oseen de taille $L_1 = 0.01\text{ m}$ et de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 1.9 \cdot 10^{-2}$ (les distances sont exprimées en mètres).

Il est important de noter que cette comparaison a été effectuée dans une situation $\lambda \simeq L$, qui ne correspond ni à l'approximation géométrique, ni à la limite des grandes longueurs d'ondes.

Les effets de focalisation, schématisés sur la figure (V.24), sont importants dans le régime de diffusion étudié. Ils sont liés au caractère géométrique de l'interaction (voir le chapitre I) entre l'onde sonore et le milieu en mouvement. Ainsi, une normalisation de l'amplitude sonore par rapport au nombre de Mach de l'écoulement n'est pas suffisante. Il est nécessaire d'effectuer un ajustement empirique du déphasage entre l'onde incidente et l'onde diffusée, notamment en ce qui concerne son amplitude.

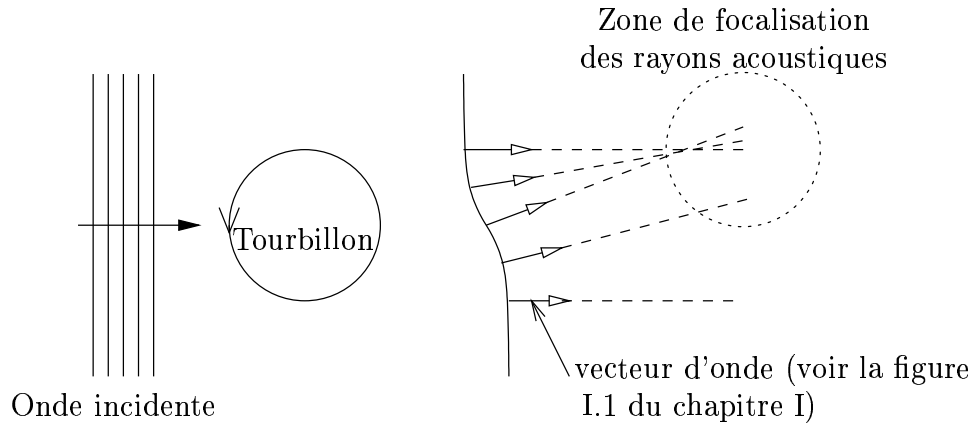


FIG. V.24 – *Effet de focalisation du son par un écoulement à circulation non nulle.*

4. Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre l'interaction entre une onde sonore et un écoulement de circulation non nulle. Dans une première partie, nous avons explicité en détail les deux effets de l'écoulement moyen : un effet géométrique de réfraction de l'onde sonore et un effet ondulatoire de diffusion du son par les gradients de vitesse. Ces deux effets ne sont pas complètement dissociables, même si en prenant en compte la réfraction de l'onde incidente, il est possible d'isoler l'onde diffusée. Ainsi, il est clairement apparu que l'amplitude de diffusion f telle que nous la définissons ne suffit pas à caractériser l'onde diffusée. Nous avons également mis en évidence l'origine physique de la divergence de la première approximation de Born pour l'étude de la diffusion du son par des écoulements à circulation non nulle : on ne prend pas en compte la réfraction du son par l'écoulement moyen.

Cependant, comme le montre la figure V.25 (nous nous sommes volontairement placés à grandes longueurs d'ondes afin de vérifier la condition $\mu \ll 1$), la prédiction théorique de la première approximation de Born fournit un résultat *qualitativement acceptable* en dehors de la direction incidente (en pratique pour $|\theta| \geq 30^\circ$) mais *quantitativement mauvais*. Ainsi, l'utilisation de la diffusion du son pour détecter expérimentalement des écoulements à circulation non nulle reste un outil qualitativement efficace dans le cadre de la première approximation de Born, si l'on se situe dans une gamme d'angles de diffusion $|\theta| \geq 30^\circ$ [DPF98], mais cela n'est pas un bon outil de mesures pour des écoulements à circulation non nulle, contrairement à ce que laisse entendre par exemple Ferziger [Fer74].

Dans une deuxième partie, nous avons comparé nos résultats numériques avec les résultats expérimentaux de Raül Labbé. L'outil numérique développé s'avère ainsi être un bon complément de l'analyse expérimentale de l'interaction son-écoulement. Cette complémentarité sera exploitée dans la continuité de l'article présenté, afin de mieux comprendre l'évolution de l'onde sonore lors de son interaction avec l'écoulement moyen.

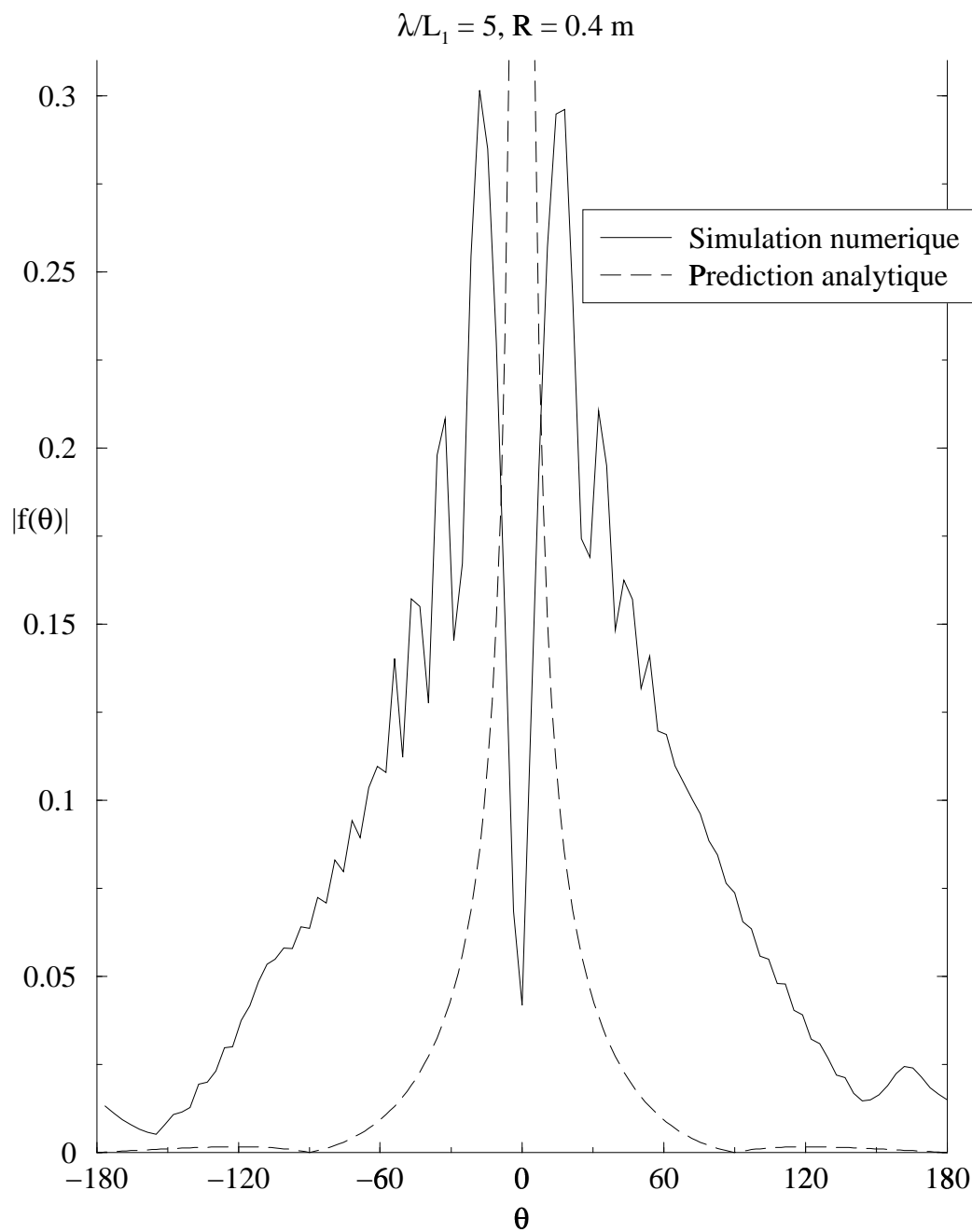


FIG. V.25 – Amplitude de diffusion $|f(\theta)|$ en fonction de l'angle de diffusion θ (exprimé en degrés) dans le cas de la diffusion d'une onde plane par un vortex d'Oseen de nombre de Mach $\mathcal{M} \simeq 7.6 \cdot 10^{-2}$ ($\Omega_0 \simeq -10000 \text{ s}^{-1}$) pour $\lambda = 10L_1$.

Conclusion

Olive et Duduche [...] regardaient de grosses méduses tourner très vite sur elles-mêmes en produisant des vortex où venaient se prendre des poissons imprudents, méthode inventée par des méduses australiennes, et qui faisait fureur à ce moment sur la côte.

B. Vian.

Nous avons au début de ce travail soulevé un certain nombre de questions relatives à l'interaction son-écoulement. Grâce aux outils que nous avons développés pour cette étude (méthode des ondes partielles au chapitre II et simulation numérique directe avec des conditions aux limites ouvertes au chapitre III), nous sommes en mesure de décrire de manière plus précise l'interaction entre une onde sonore et un écoulement non dissipatif comportant des gradients de vitesse (qui sont alors les sources de diffusion dominantes).

L'écoulement et l'onde incidente interagissent de manière « ondulatoire » (par analogie avec l'électromagnétisme) en engendrant une onde diffusée, que nous avons toujours pu clairement identifier, même dans le cas d'écoulements à circulation non nulle (chapitre IV et V). Un deuxième type d'interaction a lieu en parallèle entre les ondes (incidente et diffusée) et l'écoulement : l'écoulement advecte les ondes sonores. Cet effet est directement lié à l'approximation géométrique (ou cinématique) du son, même s'il se produit pour toutes les longueurs d'ondes sonores. Ainsi, ces deux effets ondulatoires et géométriques sont toujours présents et physiquement indissociables lors de l'interaction son-écoulement, même dans le cas d'un écoulement dont la circulation totale est nulle. Dans la limite des grandes longueurs d'ondes, l'effet géométrique est négligeable devant l'effet ondulatoire, tandis qu'il domine dans la limite des courtes longueurs d'ondes. On retrouve ici un résultat classique de l'électromagnétisme et de l'optique, entre la diffraction, qui traduit le caractère ondulatoire de la lumière, et l'optique géométrique où l'analogie entre la lumière et une particule dans un potentiel est couramment utilisée [Det90].

Les gradients de vitesse sont la source de la partie ondulatoire de la diffusion. Ainsi, nous avons montré que la diffusion du son par un écoulement irrotationnel est possible (chapitre I). Cependant, en présence de vorticité, cette contribution à la diffusion est généralement d'ordre supérieur en nombre de Mach et peut donc être négligée dans la limite $\mathcal{M} \ll 1$.

Deux approximations sont fondamentales pour une utilisation du phénomène de diffusion du son par les écoulements afin de les analyser de manière non intrusive : l'approximation du champ lointain et l'approximation de Born. En effet, il semble expérimentalement préférable de se placer dans le cadre de ces deux approximations afin d'obtenir une relation analytique simple entre l'onde sonore et la transformée de Fourier de la vorticité (chapitre I). Une violation de la première approximation de Born conduit à des expressions plus complexes de la relation entre l'onde sonore et les gradients de l'écoulement [BBL99].

Nous avons pu constater (chapitre IV) que l'approximation du champ lointain n'est pas trop difficile à satisfaire expérimentalement, et qu'il suffit de se trouver à des distances $R \simeq R_{Fr} = 2\pi L^2/\lambda$ afin de satisfaire à cette exigence. Par contre, afin de rester dans le cadre de la première approximation de Born et de pouvoir utiliser des résultats analytiques simples, il faut veiller à se trouver dans la limite $\mu = 2\pi L\mathcal{M}/\lambda \simeq 0.1$ ($\mu \leq 0.5$ pour le tourbillon de Taylor). Cela implique une contrainte sur la longueur d'onde sonore, pour un écoulement où le nombre de Mach est fixé. Les contraintes de champ lointain et de validité de la première approximation de Born conduisent ainsi à préférer une situation expérimentale où $\lambda \gg L$, ou du moins à trouver un compromis entre cette

limite et le caractère peu efficace de la diffusion du son par l'écoulement aux grandes longueurs d'ondes. Nous pouvons cependant dire à partir de l'étude que nous avons menée que ces deux limites ne sont pas trop difficiles à obtenir expérimentalement, comme en témoignent les multiples utilisations du son pour caractériser un écoulement turbulent [BS66, Lab96, DPF98, MRM⁺99, BMW99] pour lesquelles on peut constater que les deux approximations $R \simeq R_{Fr}$ et $\mu \simeq 0.1$ sont vérifiées.

Lorsque la première approximation de Born n'est plus vérifiée, l'effet géométrique devient de plus en plus important dans l'interaction son-écoulement. Ainsi, lorsque la longueur d'onde diminue, la diffusion tend vers l'image géométrique de l'onde incidente après son passage dans l'écoulement (chapitre IV). De plus, il apparaît un maximum dans la section efficace totale de diffusion, pour une longueur d'onde voisine de la taille caractéristique de l'écoulement. Enfin, il semble que la grandeur pertinente soit alors la section efficace totale de diffusion, et non plus l'amplitude de diffusion pour quelques angles de diffusion, car la diffusion est anisotrope et se concentre autour de la direction incidente. Il est donc plus simple de rester dans le cadre de la première approximation de Born, pour laquelle le maximum de l'amplitude de diffusion à angle de diffusion donné est parfaitement bien connu (chapitre IV).

Finalement, nous pouvons conclure que la diffusion sonore est un outil performant et non intrusif d'analyse des écoulements, pour lequel les limites d'utilisation ne sont pas trop contraignantes, l'approximation la plus importante à vérifier expérimentalement étant la validité de la première approximation de Born.

L'ensemble de ce travail a clarifié certains points sur la diffusion du son. Il soulève également de nouvelles questions sur lesquelles nous pensons qu'il sera intéressant de se pencher avec les outils dont nous disposons maintenant :

- peut-on, à partir de l'amplitude de diffusion pour plusieurs angles de diffusion et plusieurs longueurs d'ondes, reconstruire précisément la structure de l'écoulement moyen qui a engendré la diffusion ?
- que se passe-t-il si l'onde incidente est une onde sonore non linéaire, i.e. d'amplitude suffisamment importante ?
- comment évolue la section efficace totale de diffusion dans le cas d'un écoulement comportant des structures de taille différentes ?
- quels sont les effets sur une onde sonore d'un nombre de Mach important. Cette dernière question peut notamment conduire à l'étude de l'amplification d'une onde sonore entre deux couches de cisaillement, mais aussi à l'étude de la formation de spirales de l'onde sonore qui est alors fortement advectée par l'écoulement moyen [VM00];

- quel est l'effet d'une assemblée désordonnée de tourbillons sur l'allure de l'onde diffusée?

Bibliographie

- [AB59] Y. Aharonov and D. Bohm. *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*. The Physical Review, **115**, 3, pp 485-491, 1959.
- [AFP00] S. Aumaître, S. Fauve, and J.F. Pinton. *Large Scale Correlations for energy Injection Mechanisms in Swirling Turbulent Flows*. The European Physical Journal B, **16**, pp 563-567, 2000.
- [Ast93] D. Astruc. *Instabilité de Kelvin-Helmholtz en Régime Subsonique : Développement Spatial et Conditions aux Limites Ouvertes*. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 1993.
- [BAE00] R. Berthet, D. Astruc, and J.L. Estivalèzes. *Assessment of Numerical Boundary Conditions for Simulation of Sound Scattering by Vorticity*. 6th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Westin Maui, Maui, Hawaii, **AIAA-2000-2005**, 06-2000.
- [Bar96] G.I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge University Press, 1996.
- [Bat94] G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1994.
- [BB76] J.P. Boris and D.L. Book. *Solution of Continuity Equations by the Method of Flux-Corrected Transport*. Methods in Computational Physics, Academic Press, 16, 1976.
- [BBL99] D. Boyer, M. Baffico, and F. Lund. *Propagation of acoustic waves in disordered flows composed of many vortices. I. General aspects*. Physics of Fluids, **11**, 12, pp 3819-3828, 1999.
- [BCL⁺80] M.V. Berry, R.G. Chambers, M.D. Large, C. Upstill, and J.C. Walmley. *Wavefront dislocations in the Aharonov-Bohm effect and its water wave analogue*. European Journal of Physics, **1**, pp 154-162, 1980.

- [BCP91] C. Baudet, S. Ciliberto, and J.F. Pinton. *Spectral Analysis of the von Kármán Flow using Ultrasound Scattering*. Physical Review Letters, **67**, 2, pp 193-195, 1991.
- [Ber46] P.G. Bergmann. *The Wave Equation in a Medium with a Variable Index of Refraction*. Journal of the Acoustical Society of America, **17**, 4, pp 329-333, 1946.
- [Ber94] R. Berthet. *Interactions Son-Vorticité*. Rapport de Stage de DEA sous la direction de F. Lund (non publié), ENS-Lyon et Université du Chili, 1994.
- [BKS72] D. Burnham, R. Kodis, and T. Sullivan. *Observations of Acoustic Ray Deflection by Aircraft Wake Vortices*. Journal of the Acoustical Society of America, **52**, 1, pp 431-433, 1972.
- [BL95] R. Berthet and F. Lund. *The forward Scattering of Sound by Vorticity*. Physics of Fluids, **7**, 10, pp 2522-2524, 1995.
- [BL99] D. Boyer and F. Lund. *Propagation of acoustic waves in disordered flows composed of many vortices. II. Examples*. Physics of Fluids, **11**, 12, pp 3829-3845, 1999.
- [Blo46] D. Blokhintzev. *The Propagation of Sound in an Inhomogeneous and Moving Medium I*. Journal of the Acoustical Society of America, **18**, 2, pp 322-328, 1946.
- [BMPT85] A. Bayliss, L. Maestello, P. Parikh, and E. Turkel. *A Fourth-Order Scheme for the Unsteady Compressible Navier-Stokes Equations*. AIAA Paper, **85-1694**, 1985.
- [BMW99] C. Baudet, O. Michel, and W.J. Williams. *Detection of Coherent Vorticity Structures Using Time-Scale Resolved Acoustic Spectroscopy*. Physica D, **128**, pp 1-17, 1999.
- [Bro77] E. G. Broadbent. *Acoustic Ray Theory Applied to Vortex Refraction*. J. Inst. Maths. Applics, **19**, pp 1-27, 1977.
- [BS66] W. Baerg and W. H. Schwarz. *Measurements of the Scattering of Sound from Turbulence*. Journal of the Acoustical Society of America, **39**, 6, pp 1125-1132, 1966.
- [BT82] A. Bayliss and E. Turkel. *A Far Field Boundary Conditions for Compressible Flows*. Journal of Computational Physics, **48**, pp 182-199, 1982.

- [BW99] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics, seventh edition*. Cambridge University Press, 1999.
- [Can77] S.M. Candel. *Numerical Solution of Conservation Equations Arising in Linear Wave theory: Application to Aeroacoustics*. Journal of Fluid Mechanics, **83**, 3, pp 465-493, 1977.
- [Can79] S.M. Candel. *Numerical Solution of Wave Scattering Problems in the Parabolic Approximation*. Journal of Fluid Mechanics, **90**, 3, pp 465-507, 1979.
- [CB86] Y. Coudert and C. Basdevant. *Experimental and Numerical Study of vortex Couples in Two-dimensional Flows*. Journal of Fluid Mechanics, **173**, pp 225-251, 1986.
- [CDC95] O. Cadot, S. Douady, and Y. Couder. *Characterization of the Low-pressure Filaments in a Three-dimensional Trubulent Shear Flow*. Physics of Fluids, **7**, 3, pp 630-646, 1995.
- [Chu75] V.I. Chuprynin. *Sound Propagation in an inhomogeneous medium*. Soviet Physics Acoustics, **20**, 6, pp 574-575, 1975.
- [CK58] B. Chu and L.S.G. Kovásznyai. *Non-linear Interactions in a Viscous Heat-conducting Compressible Gas*. Journal of Fluid Mechanics, **3**, pp 494-514, 1958.
- [CL99] C. Coste and F. Lund. *Scattering of dislocated wave fronts by vertical vorticity and the Aharonov-Bohm effect. II. Dispersive waves*. Physical Review E, **60**, 4, pp 4917-4925, 1999.
- [CLM93] T. Colonius, S.K. Lele, and P. Moin. *Boundary Conditions for Direct Computation of Aerodynamic Sound Generation*. AIAA Journal, **31**, 9, pp 1574-1582, 1993.
- [CLM94] T. Colonius, S.K. Lele, and P. Moin. *The Scattering of Sound Waves by a Vortex: Numerical Simulations and Analytical Solutions*. Journal of Fluid Mechanics, **260**, pp 271-298, 1994.
- [CLU99] C. Coste, F. Lund, and M. Umeki. *Scattering of dislocated wave fronts by vertical vorticity and the Aharonov-Bohm effect. I. Shallow water*. Physical Review E, **60**, 4, pp 4908-4916, 1999.
- [Col00] T. Colonius. *Numerical methods*. École d'été Son-Écoulement, Cargèse, 06-2000.
- [Cos99] C. Coste. *Dynamique des Contact dans les Milieux Granulaires - Interaction Son-Vorticité*. Habilitation   Diriger les Recherches; Universit  Claude Bernard Lyon I, 1999.

- [CPL96] F. Chillà, J.F. Pinton, and R. Labbé. *On the Influence of a Large-scale Coherent Vortex on the Turbulent Cascade*. Europhysics Letters, **35**, 4, pp 271-276, 1996.
- [DBBJ99] L. Dallois, P. Blanc-Benon, and D. Juvé. *A Wide-Angle Parabolic Equation for Acoustic Waves in Inhomogeneous Moving Media: Applications to Atmospheric sound Propagation*. 4th International Conference on Theoretical And Computational Acoustics, Trieste, Italy, 05-1999.
- [DCB91] S. Douady, Y. Couder, and M.E. Brachet. *Direct Observation of the Intermittency of Intense Vorticity Filaments in Turbulence*. Physical Review Letters, **67**, 8, pp 983-986, 1991.
- [Det90] L. Dettwiller. *Qu'est-ce que l'optique géométrique*. Dunod Université, 1990.
- [DPF98] B. Derroncourt, J-F. Pinton, and S. Fauve. *Experimental Study of Vorticity Filaments in a Turbulent Swirling flow*. Physica D, **117**, pp 181-190, 1998.
- [EM77] B. Engquist and A. Madja. *Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves*. Mathematics of Computation, **31**, 139, pp 629-651, 1977.
- [ESC00] A.B. Ezersky, P.L. Soustov, and V.V. Chernov. *The Scattering of Sound by a Karman Street of Large-Scale Vortices*. Preprint, 2000.
- [Fab83] A.L. Fabrikant. *Sound Scattering by vortex flows*. Soviet Physics Acoustics, **29**, 2, pp 152-155, 1983.
- [Fab00] A.L. Fabrikant. *Waves in Vortex Flows*. École d'été Son-Écoulement, Cargèse, 06-2000.
- [Fer74] J.H. Ferziger. *Low-frequency Acoustic Scattering from a Trailing Vortex*. Journal of the Acoustical Society of America, **56**, 6, pp 1705-1707, 1974.
- [Fet64] A.L. Fetter. *Scattering of Sound by a Classical Vortex*. Physical Review, **136**, 6A, pp 1488-1493, 1964.
- [FLC93] S. Fauve, C. Laroche, and B. Castaing. *Pressure Fluctuations in Swirling Turbulent Flows*. Journal de Physique II, **3**, pp 271-278, 1993.
- [FS99] R. Ford and S.G. Llewellyn Smith. *Scattering of Acoustic Waves by a Vortex*. Journal of Fluid Mechanics, **386**, pp 305-328, 1999.

- [Gam96] L. Gamet. *Simulations Numériques d'Écoulements Compressibles. Application à l'Aéroacoustique des Jets*. Thèse de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1996.
- [GE95] L. Gamet and J.L. Estivalèzes. *Non-reflexive Boundary Conditions Applied to Jet Aeroacoustics*. AIAA Paper, **95-0159**, 1995.
- [GEF82] P.R. Gromov, A.B. Ezerskii, and A.L. Fabrikant. *Sound Scattering by a Vortex Wake behind a Cylinder*. Soviet Physics Acoustics, **28**, 6, pp 452-454, 1982.
- [Geo72] T.M. Georges. *Acoustic Ray Paths through a Model Vortex with a Viscous Core*. Journal of the Acoustical Society of America, **51**, 1, pp 206-209, 1972.
- [GF80] G.M. Golemshtok and A.L. Fabrikant. *Scattering and Amplification of Sound Waves by a Cylindrical Vortex*. Soviet Physics Acoustics, **26**, 3, pp 209-213, 1980.
- [Gil90] M. B. Giles. *Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equation Calculations*. AIAA Journal, **28**, 12, pp 2050-2058, 1990.
- [Giv91] D. Givoli. *Non-Reflecting Boundary Conditions*. Journal of Computational Physics, **94**, 1, pp 1-29, 1991.
- [Gol80] H. Goldstein. *Classical Mechanics, second edition*. Addison-Wesley, 1980.
- [GR94] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products, fifth edition*. Academic Press, 1994.
- [GT76] D. Gottlieb and E. Turkel. *Dissipative Two-Four Methods for Time-Dependent Problems*. Mathematics of Computation, **30**, 136, pp 703-723, 1976.
- [Hec98] E. Hecht. *Optics, third edition*. Addison-Wesley, 1998.
- [Hig86] R.L. Higdon. *Initial-Boundary Value Problems for Linear Hyperbolic Systems*. SIAM Review, **28**, 2, pp 177-217, 1986.
- [Hir92] C. Hirsh. *Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 2*. John Wiley & Sons, 1992.
- [How00] M.S. Howe. *Lectures on the Theory of Vortex Sound*. École d'été Son-Écoulement, Cargèse, 06-2000.

- [HP99] R. Hernández-Pellicer. *Comportements Dynamiques et Contrôle de la Vorticité dans les Sillages*. Thèse de l' cole Normale Supérieure de Lyon, 1999.
- [HT95] M.E. Hayder and E. Turkel. *Nonreflecting Boundary Conditions for Jet Flow Computations*. AIAA Journal, **33**, 12, pp 2264-2270, 1995.
- [Ish78] A. Ishimaru. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. Academic Press, 1978.
- [Jac75] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics, second edition*. John Wiley & Sons, 1975.
- [Jon63] D.S. Jones. *High-Frequency Refraction and Diffraction in General Media*. Philosophical Transactions of the Royal Society, **255**, A. 1058, pp 341-387, 1963.
- [Jon90] I.G. Jonsson. *Wave-Current Interactions*. Ocean Engineering Science, The Sea, Vol 9A, pp 65-120, Edited by B. Le Mehaute and M.H. Hanes, John Wiley, 1990.
- [KB80] M.S. Korman and R.T. Beyer. *The Scattering of Sound by Turbulence in Water*. Journal of the Acoustical Society of America, **67**, 6, pp 1980-1987, 1980.
- [KBBJCB91] M. Karweit, P. Blanc-Benon, D. Juv , and G. Comte-Bellot. *Simulation of the Propagation of an Acoustic Wave through a Turbulent Velocity Field: A Study of Phase Variance*. Journal of the Acoustical Society of America, **89**, 1 , pp 52-62, 1991.
- [Kel62] J.B. Keller. *Geometrical Theory of Diffraction*. Journal of the Optical Society of America, **52**, 2, pp 116-130, 1962.
- [Kli88] V.V. Klimov. *Influence of a Vortex Velocity Field on the Propagation of Sound Waves*. Soviet Physics Acoustics, **34**, 2, pp 154-157, 1988.
- [Kor53] E.T. Kornhauser. *Ray Theory for Moving Fluids*. Journal of the Acoustical Society of America, **25**, 5, pp 945-949, 1953.
- [Kov49] L. S. G. Kov sznay. *Hot-wire Investigation of the Wake behind Cylinders at Low Reynolds Numbers*. Proceedings of the Royal Society of London, **198**, A., pp 174-190, 1949.
- [KP87] V.V. Klimov and V.L. Prozorovskii. *Scattering of acoustic waves by a three-dimensional vortex*. Soviet Physics Acoustics, **33**, 1, pp 79-81, 1987.

- [Kra53] R.H. Kraichnan. *The Scattering of Sound in a Turbulent Medium*. Journal of the Acoustical Society of America, **25**, 6, pp 1096-1104, 1953.
- [Lab96] R. Labbé. *Écoulements Tourbillonnaires de von Kármán*. Thèse de l'École Normale Supérieure de Lyon, 1996.
- [Lel92] S.K. Lele. *Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution*. Journal of Computational Physics, **103**, pp 16-42, 1992.
- [Lig52] M.J. Lightill. *On Sound Generated Aerodynamically*. Proceedings of the Royal Society of London, **211**, A, pp 564-587, 1952.
- [Lig92] J. Lighthill. *A General Introduction to Aeroacoustics and Atmospheric Sound*. ICASE Report 92-52, 09-1992.
- [Lin48] R.B. Lindsay. *Compressional Wave Front Propagation through a Simple Vortex*. Journal of the Acoustical Society of America, **20**, 2, pp 89-94, 1948.
- [LL89a] L. Landau and E. Lifchitz. *Cours de Physique Théorique, Tome 2 (Théorie des Champs)*, quatrième édition. Éditions Mir Moscou, 1989.
- [LL89b] L. Landau and E. Lifchitz. *Cours de Physique Théorique, Tome 6 (Mécanique des Fluides)*, deuxième édition. Éditions Mir Moscou, 1989.
- [LP98] R. Labbé and J.F. Pinton. *Propagation of Sound through a Turbulent Vortex*. Physical Review Letters, **81**, 7, pp 1413-1416, 1998.
- [LR89] F. Lund and C. Rojas. *Ultrasound as a Probe of Turbulence*. Physica D, **37**, pp 508-514, 1989.
- [LT96] P. Luchini and R. Tognaccini. *Direction-Adaptive Nonreflecting Boundary Conditions*. Journal of Computational Physics, **128**, 1, pp 121-133, 1996.
- [Lun89] F. Lund. *Response of a Filamentary Vortex to Sound*. Physics of Fluids, **A 1**, 9, pp 1521-1531, 1989.
- [Lun00] F. Lund. *Sound and Flow Interaction in Infinite Medium*. École d'été Son-Écoulement, Cargèse, 06-2000.
- [LW98] T. Leweke and C.H.K. Williamson. *Cooperative Elliptic Instability of a Vortex Pair*. Journal of Fluid Mechanics, **360**, pp 85-119, 1998.

- [Man00] S. Manneville. *Interaction Son-Vorticité et Retournement Temporel, des outils pour la caractérisation acoustique d'écoulements tourbillonnaires*. Thèse de l'Université Paris 7 - Denis Diderot, 2000.
- [Mat87] M. Mathiesen. *Wave Refraction by a Current Whirl*. Journal of Geophysical Research, **92**, C4, pp 3905-3912, 1987.
- [MB97] N. Mordant and M. Baudry. *Étude de la Vorticité dans les Écoulements Tourbillonnaires de von Kármán par diffusion ultrasonore*. Rapport de Stage sous la direction de J.F. Pinton (non publié), ENS-Lyon, 1997.
- [MBT81] L. Maestello, A. Bayliss, and E. Turkel. *On the Interaction of Sound Pulse with the Shear Layer of an Axisymmetric Jet*. Journal of Sound and Vibration, **74**, 2, pp 281-301, 1981.
- [MI86] P.M. Morse and K.U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press Edition, 1986.
- [Min53] D. Mintzer. *Wave Propagation in a Randomly Inhomogeneous Medium. I*. Journal of the Acoustical Society of America, **25**, 5 , pp 922-927, 1953.
- [MLM95a] B.E. Mitchell, S.K. Lele, and P. Moin. *Direct Computation of the Sound Generated by Subsonic and Supersonic Axisymmetric Jets*. Report TF-66, Stanford University, 11-1995.
- [MLM95b] B.E. Mitchell, S.K. Lele, and P. Moin. *Direct Computation of the Sound from a Compressible Co-rotating Vortex Pair*. Journal of Fluid Mechanics, **285**, pp 181-202, 1995.
- [MMRF99] S. Manneville, A. Maurel, P. Roux, and M. Fink. *Characterization of a Large Vortex Using Acoustic Time-Reversal Mirrors*. The European Physical Journal B, **9**, 11, pp 545-549, 1999.
- [Mon62] A.S. Monin. *Characteristics of the Scattering of Sound in a Turbulent Atmosphere*. Soviet Physics Acoustics, **7**, 4, pp 370-373, 1962.
- [MRM⁺99] S. Manneville, J.H. Robres, A. Maurel, P. Petitjeans, and M. Fink. *Vortex Dynamics Investigation using an Acoustic Technique*. Physics of Fluids, **11**, 11, pp 3380-3389, 1999.
- [Naz94] S.V. Nazarenko. *Absorption of Sound by Vortex Filaments*. Physical Review Letters, **73**, pp 1793-1796, 1994.
- [New82] R.G. Newton. *Scattering Theory of Waves and Particles, second edition*. Springer-Verlag, 1982.

- [Nic98] F. Nicoud. *On the Amplitude of Waves in Characteristic Boundary Conditions for Euler Equations*. Technical Report TR/CFD/98/21, CERFACS, 1998.
- [Nic99] F. Nicoud. *Defining Wave Amplitude in Characteristic Boundary Conditions*. Journal of Computational Physics, **149**, pp 418-422, 1999.
- [NL70] J.A Neubert and J.L. Lumley. *Derivation of the Stochastic Helmholtz Equation for Sound Propagation in a Turbulent Fluid*. Journal of the Acoustical Society of America, **48**, 5 (2), pp 1212-1218, 1970.
- [Obu41] A. M. Obukhov. *Sur la diffusion du son dans un écoulement turbulent*. Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS, **XXX**, 7, pp 616-620, 1941.
- [Obu94] A. M. Obukhov. *Sound and Light Propagation in a Weakly Inhomogeneous atmosphere*. Waves in Random Media, **4**, pp 9-19, 1994.
- [OGG⁺98] K. Oljaca, X. Gu, A. Glezer, M. Baffico, and F. Lund. *Ultrasound Scattering by a Swirling Jet*. Physics of Fluids, **10**, 4, pp 886-898, 1998.
- [OHWB00] M.H. Orr, L.R. Haury, P.H. Wiebe, and M.G. Briscoe. *Backscatter of high-frequency (200 kHz) Acoustic Wavefields from Ocean Turbulence*. Journal of the Acoustical Society of America, **108**, 4 , pp 1595-1601, 2000.
- [OMWG97] V.E. Ostashev, V. Mellert, R. Wandand, and F. Gerdes. *Propagation of Sound in a Turbulent Medium. I. Plane Waves*. Journal of the Acoustical Society of America, **102**, 5 , pp 2561-2570, 1997.
- [OP85] S. Olariu and I.I. Popescu. *The Quantum Effects of the Electromagnetic fluxes*. Reviews of Modern Physics, **57**, 2, pp 339-436, 1985.
- [O'S75] S. O'Shea. *Sound Scattering by a Potential Vortex*. Journal of Sound and Vibration, **43**, 1, pp 109-116, 1975.
- [Ost00] V. E. Ostashev. *Geometrical acoustics in inhomogeneous moving media*. École d'été Son-Écoulement, Cargèse, 2000.
- [OT95] V.E. Ostashev and V.I. Tatarskii. *Representation of the Helmholtz Equation Solution in the Form of a Series Based on Backscattering Multiplicity*. Waves in Random Media, **5**, pp 125-135, 1995.
- [PFTV93] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical recipes in Fortran. The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1993.

- [Pin92] J.F. Pinton. *Mesure de Vorticité par Diffusion Ultrasonore*. Thèse de l'École Normale Supérieure de Lyon, 1992.
- [Pit59] L.P. Pitaevskii. *Calculation of the Phonon Part of the Mutual Friction Force in Superfluid Helium*. Soviet Physics JETP, **35** (8), 5, pp 888-890, 1959.
- [PL92] T.J. Poinsoot and S.K. Lele. *Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows*. Journal of Computational Physics, **101**, 1, pp 104-129, 1992.
- [PLFC93] J-F. Pinton, C. Laroche, S. Fauve, and Baudet C. *Ultrasound Scattering by buoyancy driven flows*. Journal de Physique II, **3**, pp 767-773, 1993.
- [Pol85] V.A. Polyanskaya. *Influence of the current velocity field in the ocean on the propagation of sound*. Soviet Physics Acoustics, **31**, 5, pp 376-387, 1985.
- [PP97] A. Petrossian and J.F. Pinton. *Sound Scattering on a Turbulent, Weakly Heated Jet*. Journal de Physique II, **7**, 5, pp 801-812, 1997.
- [RdRTF97] P. Roux, J. de Rosny, M. Tanter, and M. Fink. *The Aharonov-Bohm Effect Revisited by an Acoustic Time-Reversal Mirror*. Physical Review Letters, **79**, 17, pp 3170-3173, 1997.
- [RMO97] J. Reinschke, W. Möhring, and F. Obermeier. *Scattering of Sound Waves by a Cylindrical Vortex: a Semi-Analytical Theory*. Journal of Fluid Mechanics, **333**, pp 273-299, 1997.
- [Roj88] C. Rojas. Magister Thesis, Universidad de Chile, Santiago (non publié), 1988.
- [RS80] D.H. Rudy and J.C. Strickwerda. *A Non-reflecting Outflow Boundary Condition for Subsonic Navier-Stokes Calculations*. Journal of Computational Physics, **36**, pp 55-70, 1980.
- [RS92] S.A. Ragab and S. Sheen. *The Nonlinear Development of Supersonic Instability Waves in a Mixing Layer*. Phys. Fluids A, **4**, 3, pp 553-566, 1992.
- [Sak93] P.V. Sakov. *Sound Scattering by a Vortex Filament*. A VERIFIER Acoustical physics, **39**, 3, pp 280-282, 1993.
- [Sal69] R. F. Salant. *Acoustic Rays in Two-Dimensional Rotating Flows*. Journal of the Acoustical Society of America, **46**, 5 (2), pp 1153-1157, 1969.

- [Siv84] D. Sivoukhine. *Cours Générale de Physique , Tome 4 (Optique), Première Partie*. Éditions Mir Moscou, 1984.
- [SK90] D. Sheres and K.E. Kenyon. *Swell Refraction by the Pt. Conception, California, eddy*. International Journal of Remote Sensing, **11**, 1, pp 27-40, 1990.
- [Sod78] G.A. Sod. *A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*. Journal of Computational Physics, **27**, pp 1-31, 1978.
- [ST70] D.W. Schmidt and P.M. Tilmann. *Experimental Study of Sound-Wave Phase Fluctuations Caused by Turbulent Wakes*. Journal of the Acoustical Society of America, **47**, 5(2), pp 1310-1324, 1970.
- [Sta00] T.K. Stanton. *On Acoustic Scattering by a Shell-Covered Seafloor*. Journal of the Acoustical Society of America, **108**, 2 , pp 551-555, 2000.
- [Str89] J.C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Chapman & Hall, 1989.
- [Tay60] G.I. Taylor. *On The Dissipation of Eddies*. The Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor, **II**, pp 96-101, Cambridge University Press, 1960.
- [Tay72] J.R. Taylor. *Scattering Theory: The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions*. John Wiley & Sons, 1972.
- [Tho87] K.W. Thompson. *Time dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems*. Journal of Computational Physics, **68**, pp 1-24, 1987.
- [Tho90] K.W. Thompson. *Time dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, II*. Journal of Computational Physics, **89**, pp 439-461, 1990.
- [TI82] K. Tanaka and S. Ishii. *Scattering of a PLane Sound Wave by a Vortex Pair*. Journal of the Physical Society of Japan, **51**, 6, pp 1992-1999, 1982.
- [Tur80] E. Turkel. *On the Practical Use of High-Order Methods for Hyperbolic Systems*. Journal of Computational Physics, **35**, pp 319-340, 1980.
- [UL97] M. Umeki and F. Lund. *Spirals and dislocations in wave-vortex systems*. Fluid Dynamics Research, **21**, pp 201-210, 1997.
- [VM00] F. Vivanco and F. Melo. *Surface Spiral Waves in a Filamentary Vortex*. Physical Review Letters, **85**, 10, pp 2116-2119, 2000.

- [VMCL99] F. Vivanco, F. Melo, C. Coste, and F. Lund. *Surface Wave Scattering by a Vertical Vortex and the Symmetry of the Aharonov-Bohm Wave Function*. Physical Review Letters, **83**, 10, pp 1966-1969, 1999.
- [WB85] H. Weinberg and R. Burridge. *Horizontal ray theory for ocean acoustics*. Journal of the Acoustical Society of America, **55**, 1, pp 63-79, 1985.
- [Whi99] G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley Inter-Science, 1999.
- [WK69] A.R. Wenzel and J.B. Keller. *Propagation of Acoustic Waves in a Turbulent Medium*. Journal of the Acoustical Society of America, **50**, 3 (2), pp 911-920, 1969.
- [Won91] C.W. Wong. *Introduction to Mathematical Physics. Methods and Concepts*. Oxford University Press, 1991.
- [Yee81] H. C. Yee. *Numerical Approximation of Boundary Conditions with Applications to Inviscid Equations of Gas Dynamics*. NASA Technical Memorandum 81265, 03-1981.
- [Zal79] S.T. Zalesak. *Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids*. Journal of Computational Physics, **31**, pp 335-362, 1979.